

Stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema**17. mars 2009****10. bekkur****Svör og lausnir****1 Fyrsti hluti**

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði. Krossið við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) Hver verður útkoman þegar reiknað er út úr stæðunni $5^2 - 4^2 + 3^2$?

 0 10 18 20

Svar: 18

Lausn: $5^2 - 4^2 + 3^2 = 25 - 16 + 9 = 18$.

2) Hvert er margfeldi talnanna 1, 2, 3, 4 og 5?

 15 120 720 1000

Svar: 120

Lausn: $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = (2 \times 5) \times (3 \times 4) = 10 \times 12 = 120$.

3) Í Eden kjósa íbúarnir 538 sér forseta. Tveir frambjóðendur eru í boði, Bára og Sara. Hver er minnsti atkvæðafjöldi sem önnur þarf til að tryggja sér meirihluta?

 268 269 270 538

Svar: 270

Lausn: Við athugum að $\frac{538}{2} = 269$. Fáí önnur þeirra 269 atkvæði getur hún ekki verið viss um að sigra í kosningunum því þá er möguleiki á jafntefli. Fáí önnur þeirra hins vegar 270 er öruggt að hin getur ekki hlotið fleiri en 268 atkvæði.

4) Á myndinni er töfrateningur sem er þannig að summan á að vera sú sama hvort sem tölurnar eru lagðar saman eftir láréttum línum, lóðréttum dálkum eða eftir hornalínunum. Hvaða tölu stendur n fyrir?

8		
9		5
4	n	

- 6 7 10 11

Svar: 11

Lausn: „Töfrasumman“ er $8 + 9 + 4 = 21$. Við fáum þá að talan í miðjureitnum er $21 - (9 + 5) = 21 - 14 = 7$ og þá er talan í reitnum niðri til hægri $21 - (8 + 7) = 21 - 15 = 6$. Bókstafurinn n stendur því fyrir töluna $21 - (4 + 6) = 21 - 10 = 11$.

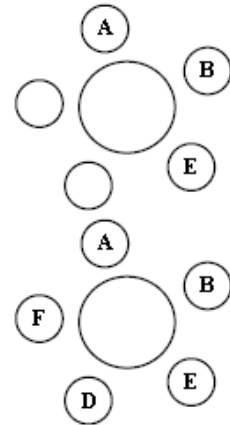
5) Ari, Birna, Davíð, Elín og Finnur sitja við hringborð í veislu. Birna situr á milli Ara og Elínar. Finnur situr ekki við hliðina á Elínu. Hver þeirra sitja við hliðina á Finni?

- Ari og Davíð Birna og Davíð Ari og Birna Elín og Birna

Svar: Ari og Davíð

Lausn: Látum upphafsstafi veislugesta tákna sæti viðkomandi. Við vitum að Birna situr á milli Ara og Elínar og getum því gert ráð fyrir að þau sitji eins og myndin sýnir.

Úr því Finnur situr ekki við hliðina á Elínu þá situr hann í sætinu við hliðina á Ara og þá situr Davíð í sætinu við hliðina á Elínu.



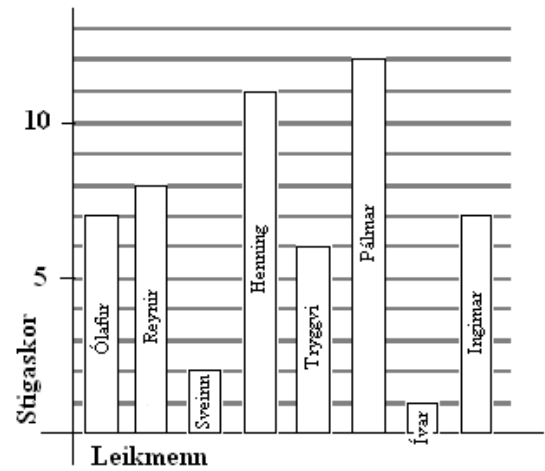
6) Veitingamaðurinn Mjödðvitnir kaupir 500 Kúbuvindla á 300 krónur stykkið til að selja á veitingastaðnum sínum Ókólmi. Áður en Mótsognir lögreglumaður mætir á svæðið hefur Mjödðvitnir náð að selja 400 vindla fyrir 700 krónur hvern. Mótsognir gerir afganginn af vindlunum upptækan og sektar Mjödðvitni um 100.000 krónur. Hve mikið hefur Mjödðvitnir upp úr þessum viðskiptum?

- 100.000kr -30.000kr +30.000kr +100.000kr

Svar: +30.000 krónur

Lausn: Mjödðvitnir borgar $500 \times 300 = 150.000$ krónur fyrir vindlana, 100.000 krónur í sekt og samtals 250.000 krónur. Fyrir söluna fær hann $400 \times 700 = 280.000$ krónur. Hann hefur því $280.000 - 250.000 = 30.000$ krónur upp úr þessum viðskiptum.

7) Súluritið sýnir stigaskor leikmanna körfu-boltaliðsins Rjúpunnar eftir leik gegn Staurum. Hve mörg stig skoraði Rjúpan í leiknum?


 12

 46

 54

 58

Svar: 54

Lausn: Rjúpan skoraði $7 + 8 + 2 + 11 + 6 + 12 + 1 + 7 = 54$ stig í leiknum.

8) Nonni níski er forstjóri Fjárglæfrayfirtækisins Aursins. Hann ræður til sín stærðfræðing í 8 klukkustundir og býður honum hundrað krónur í laun fyrir fyrsta tímann, tvö hundruð krónur fyrir annan tímann, fjögur hundruð fyrir þann þriðja, 800 fyrir þann fjórða o.s.frv. Hve mikið þarf hann að borga stærðfræðingnum fyrir 8. klukkustundina?

 3.200 kr

 6.400 kr

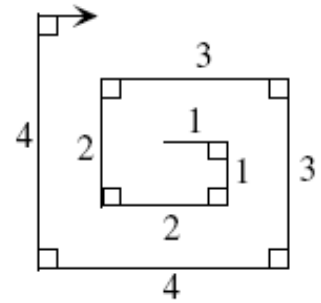
 12.800 kr

 25.600 kr

Svar: 12.800 kr

Lausn: Fyrir n -tu klukkustundina borgar Nonni $2^{n-1} \times 100$ krónur. Fyrir 8. klukkustundina borgar hann því $2^7 \times 100 = 128 \times 100 = 12.800$ krónur.

9) Sif teiknar rétthyrndan spíral á stórt blað með strikum eins og myndin sýnir. Lengdir strikanna eru í heilum sentimetrum og fyrsta strikið er 1 cm. Eftir að hafa dregið línustrik með þessum hætti samtals 10 metra klárast bleikið í pinnanum. Hve langt er lengsta línustrikið sem Sif dró?



- 29 cm 30 cm 31 cm 32 cm

Svar: 31 cm

Lausn: Prófum okkur aðeins áfram. Athugum hvað Sif hefur dregið marga metra þegar hún hefur teiknað 30 tvenndir af svona línustrikum með lengdirnar, 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 30, 30 í sentimetrum. Summa tvenndanna 30 er $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 29 + 29 + 30 + 30 = (1 + 30) + (2 + 29) + (3 + 28) + \dots + (29 + 2) + (30 + 1) = 30 \times 31 = 930$ cm. Eftir að Sif hefur dregið tvær línur til viðbótar sem eru hvor um sig 31 cm þá hefur hún dregið samtals $930 + 2 \times 31 = 992$ cm. Næsta línustrik verður því aðeins $1000 - 992 = 8$ cm. Þar með er lengsta strikið sem hún dregur 31 cm.

10) Hvaða tölustafur verður í einingasæti tölunnar sem fæst þegar reiknað er út úr stæðunni $3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}$?

- 0 1 3 9

Svar: 0

Lausn: Athugum að 3^1 endar á 3, $3^2 = 9$ endar á 9, $3^3 = 27$ endar á 7 og $3^4 = 81$ endar á 1. Þetta endurtekur sig þannig að tölurnar $3^8, 3^{12}, 3^{16}, \dots$ enda allar á 1. Þar sem 2008 er deilanlegt með 4 þá endar 3^{2008} á 1. Þannig endar $3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}$ á $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ og einingasæti summunnar er því 0.

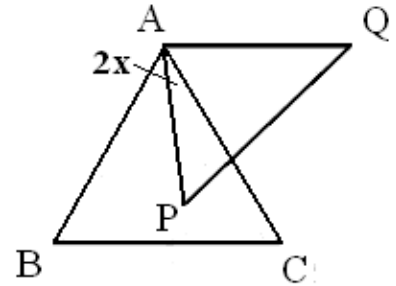
11) Magnús málar stóran vegg með jöfnum hraða. Klukkan 14:30 hefur hann málað $\frac{2}{3}$ af veggnum og klukkan 15:00 hefur hann lokið við $\frac{3}{4}$ af veggnum. Hvenær lýkur hann við að mála vegginn?

- 15:00 15:30 16:00 16:30

Svar: 16:30

Lausn: Á hálf tíma málar Magnús $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3 - 2 \times 4}{12} = \frac{1}{12}$ af veggnum. Hann er því 12 hálf tíma að mála vegginn en það gera 6 klukkustundir. Þar sem $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ þá hefur hann málað í fjórar klukkustundir klukkan 14:30 og lýkur því verkinu tveimur tímum síðar eða klukkan 16:30.

12) Á myndinni er þríhyrningurinn $\triangle ABC$ jafnhliða. Þríhyrningurinn $\triangle APQ$ er jafnarma með $AQ = AP$ og línustrikin AQ og BC samsíða. Hve stórt er hornið $\angle AQP$ ef hornið $\angle PAC$ er $2x$?



- $60^\circ - x$ $60^\circ + x$ $120^\circ - x$ $180^\circ + x$

Svar: $\angle AQP = 60^\circ - x$

Lausn: Hornið $\angle ACB = 60^\circ$ þar sem þríhyrningurinn $\triangle ABC$ er jafnhliða. Þar sem AQ er samsíða BC þá er hornið $\angle QAC = 60^\circ$. Látum $y = \angle AQP$. Þá er líka $y = \angle APQ$ því þríhyrningurinn $\triangle APQ$ er jafnarma. Hornasumma þríhyrningsins $\triangle APQ$ gefur okkur þá $180^\circ = 2y + 2x + 60^\circ$. Því er $x + y = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ og hornið $\angle AQP = y = 60^\circ - x$.

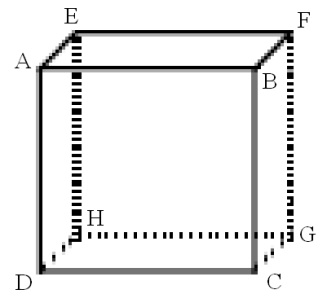
13) Hver verður útkoman þegar stæðan $\frac{4.026 \times 2.009^3}{2.009^4 + 4 \times 2.009^3}$ er einfölduð?

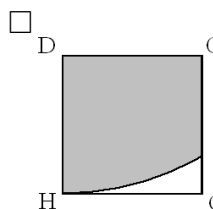
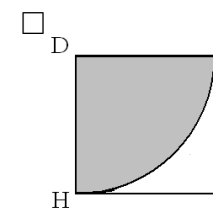
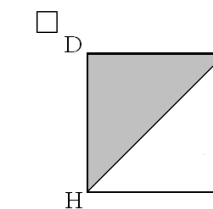
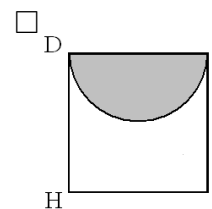
- 2 2009 4018 2009^2

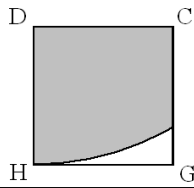
Svar: 2

Lausn: $\frac{4.026 \times 2.009^3}{2.009^4 + 4 \times 2.009^3} = \frac{4.026 \times 2.009^3}{2.009^3(2.009 + 4)} = \frac{4.026}{2.009 + 4} = \frac{4.026}{2.013} = 2$.

14) Myndin sýnir teningslaga kassa með eins metra brúna lengd. Snigillinn Snúlla er í horninu A. Hún gengur með hraðanum 1 metri á dag. Hvernig lítur hliðin $CDHG$ út ef við skyggjum svæðið sem hún getur náð til eftir tveggja daga göngu?

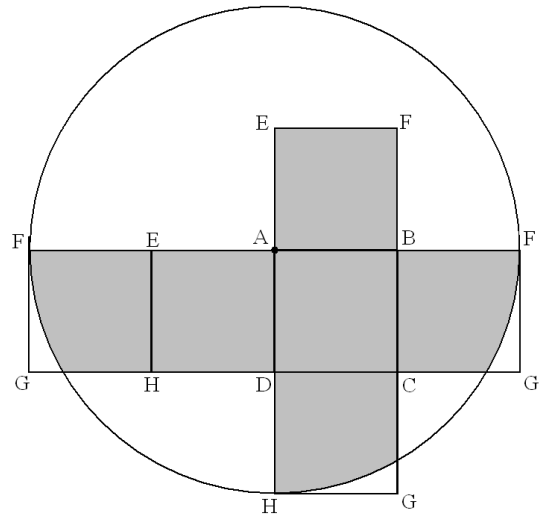


-    

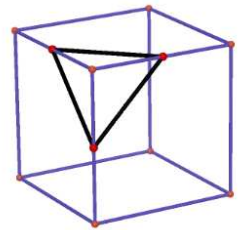


Svar:

Lausn: Byrjum á að fletja út teninginn og teikna yfir hann hring með miðju í A og tveggja metra geisla (radíus). Það sýnir okkur að fyrsti valmöguleikinn er sá rétti.



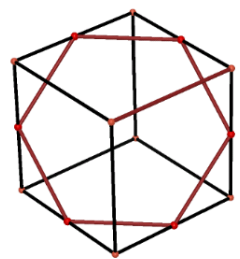
15) Sé teningur skorinn með sléttu myndar skurðflöturinn marghyrning. Myndin sýnir hvernig skurðflöturinn getur myndað reglulegan þríhyrning. Hvaða gerðir reglulegra marghyrninga getur skurðflöturinn myndað?



- þríhyrning og ferhyrning
- þríhyrning, ferhyrning og sexhyrning
- þríhyrning, ferhyrning og tólfhyrning
- þríhyrning, ferhyrning, fimmhyrning og sexhyrning

Svar: Þríhyrning, ferhyrning og sexhyrning

Lausn: Marghyrningurinn, sem myndast, hefur jafnmargar hliðar og fjöldi hliðanna sem sléttan sker. Teningur hefur sex hliðar og því koma aðeins reglulegir marghyrningar með þrjár, fjórar, fimm eða sex hliðar til greina. Við höfum séð að skurðflöturinn getur myndað reglulegan (jafnhliða) þríhyrning. Hann getur einnig myndað reglulegan ferhyrning (ferning), t.d. með því að leggja sléttuna á einhvern flöt teningsins. Myndin sýnir hvernig skurðflöturinn getur myndað reglulegan sexhyrning.



Skurðflöturinn getur hins vegar ekki myndað reglulegan fimmhyrning. Það sést á því að þegar sléttan sker a.m.k. fjóra hliðarflæti teningsins þá eru a.m.k. tveir þeirra samsíða. Því eru a.m.k. tvær samsíða hliðar í marghyrningnum sem myndast. Reglulegur fimmhyrningur hefur aftur á móti engar samsíða hliðar. Skurðflöturinn getur því aðeins myndað reglulegan þríhyrning, reglulegan ferhyrning og reglulegan sexhyrning.

2 Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði. Hér á aðeins að skrifa svarið.

16) 27 ára gömul móðir á 5 ára gamalt barn. Hve mörg ár líða uns aldur móðurinnar verður þrefaldur aldur barnsins?

Svar: 6

Lausn: Látum x vera fjölda ára sem líða uns aldur móðurinnar verður þrefaldur aldur barnsins. Þá er $27 + x = 3(5 + x) = 15 + 3x$ sem þýðir að $2x = 12$ og því $x = 6$. Aldur móðurinnar verður þrefaldur aldur barnsins eftir 6 ár.

17) Rita má töluna 200 sem $2^m \times 5^n$, þar sem m og n eru heilar tölur. Hver er summan $m + n$?

Svar: 5

Lausn: Nú er $200 = 8 \times 25 = 2^3 \times 5^2$ og því $m + n = 3 + 2 = 5$.

18) Náttúrleg tala stærri en 1 er framtala ef einu náttúrlegu tölurnar sem ganga upp í henni eru talan 1 og hún sjálf. Tölurnar 887 og 907 eru framtölur. Hins vegar eru tölurnar 19 á milli þeirra allar samsettar, þ.e. ekki framtölur. Hve margar af þessum 19 tölum eru ekki deilanlegar með neinni af tölunum 2, 3 eða 5?

Svar: 4

Lausn: Við athugum að 900 eru deilanleg með 2, 3 og 5. Göngum á röðina og strikum yfir þær tölur sem eru deilanlegar með tveimur, en það er önnur hver tala talið frá 900. Strikum síðan yfir þær tölur sem eru deilanlegar með 3 en það er þriðja hver tala talið frá 900 og strikum loks yfir þær tölur sem eru deilanlegar með 5 sem er fimmta hver tala talið frá 900. 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906. Eftir standa fjórar tölur sem eru þá ekki deilanlegar með neinni af tölunum 2, 3 eða 5.

19) Gísli og Eiríkur spila kotru. Myndin sýnir stöðuna þegar Gísli, sem hefur svart, á að kasta. Hann kastar tveimur teningum og vinnur nema upp komi ás á minnst annan teninginn. Ef upp kemur ás þá vinnur Eiríkur. Við gerum greinarmun á teningunum tveimur. Það eru því möguleg $6 \times 6 = 36$ mismunandi köst. Hve mörg þessara 36 kasta leiða til ósigurs Gísla?



Svar: 11

Lausn: Teljum fjölda kasta sem innihalda ekki ás. Fyrir hvorn tening höfum við 5 mögulegar útkomur og köstin, sem innihalda ekki ás, eru því $5 \times 5 = 25$ talsins. Fjöldi kasta, sem innihalda ás, eru þess vegna $36 - 25 = 11$.

20) Á ættarmóti mæta allir afkomendur Stínu og Geira. Stína og Geiri eignuðust sjö börn sem öll eignuðust fimm börn. Öll barnabörn Stínu og Geira eignuðust síðan þrjú börn sem aftur eignuðust öll tvö börn. Hversu mörg börn, barnabörn, barnabarnabörn og barnabarnabarnabörn eiga Stína og Geiri samtals?

Svar: 357

Lausn: Stína og Geiri eiga 7 börn, $7 \times 5 = 35$ barnabörn, $35 \times 3 = 105$ barnabarnabörn og $105 \times 2 = 210$ barnabarnabarnabörn. Þetta gerir samtals $7 + 35 + 105 + 210 = 357$ afkomendur.

21) Hlaupár er eins og flestir vita á fjögurra ára fresti. Hins vegar er ekki hlaupár þegar ártalið er deilanlegt með 100 nema þegar ártalið er deilanlegt með 400. 1. apríl árið 1999 var á fimmtudegi. Á hvaða vikudegi var 1. apríl árið 2000?

Svar: Á laugardegi

Lausn: Talan 2000 er deilanleg með 400 og árið 2000 því hlaupár með 366 dögum. Nú er $366 = 7 \times 52 + 2$ svo 1. apríl árið 2000 er tveimur vikudögum seinna en árið 1999 eða á laugardegi.

22) Hver verður næsta talan í rununni 1, 9, 65, 457, ___ ?

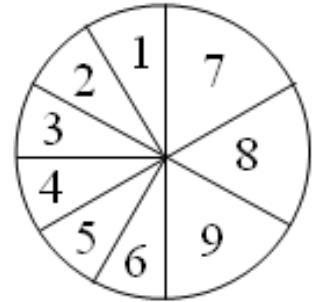
Svar: 3.201

Lausn: Hver tala, nema sú fyrsta, er sjöföld talan á undan að viðbættum tveimur. Næsta tala í rununni verður því $7 \times 457 + 2 = 3.201$.

3 Þriðji hluti

Í þessum hluta eru tvö dæmi sem er 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

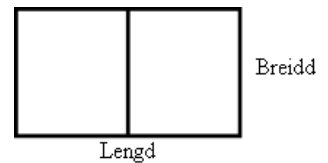
23) Lukkuhjóli er skipt í 9 hluta eins og myndin sýnir. Vinstri helmingi skífunnar er skipt í 6 jafnstóra hluta og hægri helmingnum er skipt í þrjá jafnstóra hluta og hver hluti er númeraður frá 1 upp í 9 eins og myndin sýnir. Hverjar eru líkurnar á að fá oddatölu þegar hjólinu er snúið af handahófi?



Svar: $\frac{7}{12}$

Lausn: Á vinstri helmingi skífunnar eru 6 hringgeirar. Í hverjum þeirra er $180^\circ/6 = 30^\circ$ horn við miðju skífunnar og af þeim eru þrír geirar merktir oddatölu. Á hægri helmingnum eru þrír geirar. Í hverjum þeirra er $180^\circ/3 = 60^\circ$ horn við miðju skífunnar og tveir af þeim eru merktir oddatölu. Summa horna við miðju í hringgeirum merktum oddatölu er því $3 \times 30^\circ + 2 \times 60^\circ = 90^\circ + 120^\circ = 210^\circ$ sem er $210^\circ/360^\circ = 7/12$ af heilum hring. Líkurnar á að upp komi oddatala er þar með $7/12$.

24) Jón bóndi girðir af túnið sitt sem er ferhyrningslaga og skiptir túninu auk þess í tvennt með girðingu eins og myndin sýnir. Girðingarefnið er samtals 240 metrar og breiddin er 42 metrar. Hvert er heildarflatarmál túnsins?



Svar: 2.394 m^2

Lausn: Látum L vera lengd túnsins, þá er $240 = 2L + 3 \times 42 = 2L + 126$ sem er jafngilt $2L = 240 - 126 = 114$ og þá $L = \frac{114}{2} = 57$. Flatarmál túnsins er því $57 \times 42 \text{ m}^2 = 2.394 \text{ m}^2$.