Stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema
17. mars 2009
8. bekkur

Svör og lausnir

1 Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 20 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði. Krossið við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

---

1) Hver er summa talnanna 2008 og $1,2009$?

☐ $2008,3009$ ☐ $2009,2009$ ☐ $2009,2010$ ☐ 4018

Svar: $\underline{2009,2009}$
Lausn: $2008 + 1,2009 = 2009,2009$.

---

2) Hver verður útkoman þegar reiknað er út úr stæðunni $987 + 113 - 1000$?

☐ 10 ☐ 110 ☐ 100 ☐ 2000

Svar: $\underline{100}$
Lausn: $987 + 113 - 1000 = 1100 - 1000 = 100$.

---

3) Baldur hugsar sér tölu. Hann segir að þegar deilt sé upp í töluna með 7 fáist kvótinn 4 og afgangurinn 6. Hver er þessi tala?

☐ 26 ☐ 31 ☐ 34 ☐ 46

Svar: $\underline{34}$
Lausn: Látum T tákna töluna. Þá er $T = 4 \times 7 + 6 = 34$. Talan, sem Baldur hugsar sér, er því 34.

---

4) Aðgerðin $\otimes$ verkar milli tveggja talna a og b þannig að $a \otimes b = 2 \times a \times b$. Til dæmis er $4 \otimes 5 = 2 \times 4 \times 5 = 40$. Hvert er þá gildi $(1 \otimes 2) \otimes 3$?

☐ 6 ☐ 12 ☐ 18 ☐ 24

Svar: $\underline{24}$
Lausn: $(1 \otimes 2) \otimes 3 = (2 \times 1 \times 2) \otimes 3 = 4 \otimes 3 = 2 \times 4 \times 3 = 24$.

---

5) Í summuna hér til hliðar vantar tvo tölustafi til að samlagningin verði rétt. Hver er summa þeirra?

$$\begin{array}{r} 8\,6\,3 \\ +\,\square\,9\,1 \\ +\,7\,\square\,8 \\ \hline 2\,1\,8\,2 \end{array}$$

☐ 7 ☐ 9 ☐ 11 ☐ 13

Svar: 7

Lausn: Látum x vera tölustafinn sem vantar í tugasætið og y tölustafinn sem vantar í hundraðasætið. Við geymum 1 frá samlagningunni í einingasætinu. Til að tugasætið sé rétt þarf $1 + 6 + 9 + x = 16 + x$, þar sem $0 \leq x \leq 9$, að enda á 8. Það segir okkur að $x = 2$. Þá er einn geymdur í hundraðasætinu og til að summan í því sé 21 verður $y = 21 - (8 + 7 + 1) = 21 - 16 = 5$. Summa x og y er því $5 + 2 = 7$.

$$\begin{array}{r} 8\,6\,3 \\ +\,5\,9\,1 \\ +\,7\,2\,8 \\ \hline 2\,1\,8\,2 \end{array}$$

---

6) Hvaða tölustafur verður í einingasætinu þegar talan 4567 er margfölduð með þremur?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7

Svar: 1

Lausn: Til að finna út hvaða tölustafur er í einingasætinu er nóg að athuga hvaða tölustafur er í einingasætinu þegar 7 og 3 er margfaldað saman. Nú er $3 \times 7 = 21$ og tölustafurinn í einingasætinu er því 1.

---

7) Summa tveggja jákvæðra heilla talna er 42 og margfeldi sömu talna er 341. Hverjar eru tölurnar?

☐ 1 og 41 ☐ 1 og 42 ☐ 1 og 341 ☐ 11 og 31

Svar: 11 og 31

Lausn: Köllum minni töluna a og þá stærri b. Þá er $a + b = 42$ og $a \times b = 341$. Einu jákvæðu heilu tölurnar a og b sem uppfylla $a \times b = 341$ eru $a = 1$ og $b = 341$ annars vegar og $a = 11$ og $b = 31$ hins vegar. Af þessum möguleikum uppfyllir aðeins $a = 11$ og $b = 31$ skilyrðið $a + b = 42$.

---

8) Nokkrir menn ætla að girða af gamalt steinhús. Girðingin á að afmarka rétthyrning sem er 80 m á aðra hliðina og 60 m á hina. Mennirnir ætla að hafa tvo metra milli girðingarstaura. Hve marga staura þurfa þeir?

☐ 140 ☐ 142 ☐ 144 ☐ 146

Svar: 140

Lausn: Það þarf 4 hornstaura, 39 staura fyrir hvora lengri hliðanna og 29 staura fyrir hvora styttri. Samtals þarf því $4 + 39 + 39 + 29 + 29 = 140$ girðingarstaura.

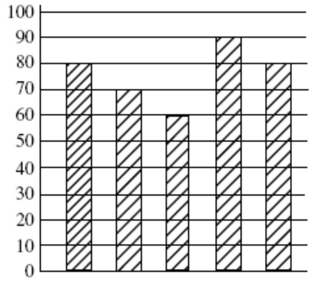
9) Táknin $\spadesuit\Psi\clubsuit\triangle\diamondsuit$ eru endurtekin í þessari röð og mynda rununa $\spadesuit\Psi\clubsuit\triangle\diamondsuit\spadesuit\Psi\clubsuit\triangle\diamondsuit\ldots$ Hvert er 214. táknið í rununni?

☐ $\spadesuit$ ☐ Ψ ☐ $\clubsuit$ ☐ $\triangle$

Svar: $\underline{\triangle}$
Lausn: Það eru fimm tákn endurtekin og því er táknið númer $214 = 5 \times 42 + 4$ það sama og táknið númer 4 sem er $\triangle$.

---

10) Hildur æfir sig fyrir stærðfræðikeppni með því að reikna úr fyrri keppnum. Súluritið hér til hliðar sýnir hve mörg stig hún fékk úr hverri keppni. Hve mörg stig fær Hildur að meðaltali úr keppnunum fimm?



☐ 70 ☐ 74 ☐ 76 ☐ 79

Svar: $\underline{76}$
Lausn: Meðaltal Hildar er $\frac{80+70+60+90+80}{5} = \frac{380}{5} = 76$.

---

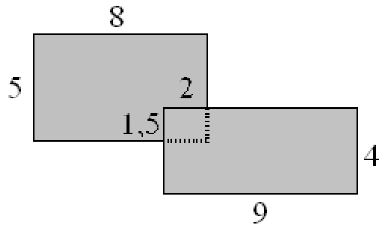
11) Sámur skuldar hrein ósköp. Staðan á bankareikningnum hans sýnir -70.000 krónur. Hann tekur sig því til og innheimtir allar útistandandi skuldir sínar. Heimturnar eru því miður mjög dræmar og það eina sem hann fær greitt inn á reikninginn sinn er gömul skuld frá jólasveininum upp á 2.345 krónur. Hver er staðan á bankareikningnum eftir að jólasveinninn hefur borgað honum 2.345 krónur?

☐ -72.345 ☐ -67.655 ☐ 67.655 ☐ 72.345

Svar: $\underline{-67.655}$
Lausn: Skuldin lækkar um 2.345 krónur og verður $70.000 - 2.345 = 67.655$ krónur. Staðan á bankareikningnum hans er því -67.655.

---

12) Motturnar á gólfinu hjá tröllunum Mími og Mínervu liggja eins og myndin sýnir þar sem mælt er í metrum. Hve marga fermetra hylja motturnar?

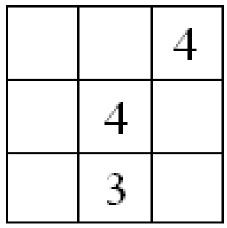


☐ 70 ☐ 73 ☐ 76 ☐ 79

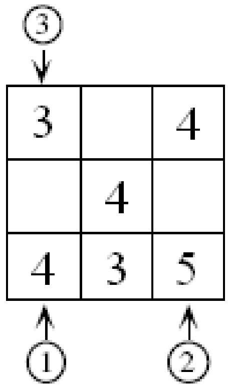
Svar: <u>73</u>
Lausn: Önnur mottan hylur $8 \times 5 = 40$ fermetra en hin $4 \times 9 = 36$ fermetra. Ef við leggjum saman flatarmálin þá tvíteljum við flatarmálið þar sem þær skarast. Svæðið sem þær skarast er $1,5 \times 2 = 3$ fermetrar. Motturnar hylja því $40 + 36 - 3 = 76 - 3 = 73$ fermetra.

---

13) Á ferningnum á myndinni hafa þurrkast út nokkrar tölur. Áður en þær þurrkuðust út var summan 12, hvort sem tölurnar voru lagðar saman í láréttri röð, lóðréttum dálki eða eftir hornalínu. Hver var summa talnanna í hornreitunum?



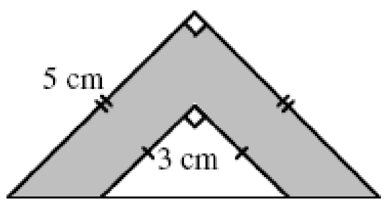
☐ 12 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16



Svar: <u>16</u>
Lausn: Við sjáum að talan í hornreitnum niðri til vinstri er 4. Þar með er talan í hornreitnum niðri til hægri 5 og þá talan í hornreitnum uppi til vinstri 3. Summa talnanna í hornreitunum er því $4 + 4 + 5 + 3 = 16$.

---

14) Á myndinni eru tveir rétthyrndir jafnarma þríhyrningar, annar með 5 cm arma en hinn með 3 cm arma. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins sem afmarkast af þríhyrningunum?



☐ $4,5$ cm^2 ☐ 8 cm^2 ☐ 16 cm^2 ☐ 17 cm^2

Svar: <u>8 cm^2</u>
Lausn: Flatarmál stærri þríhyrningsins er $\frac{1}{2}5 \times 5$ cm$^2 = \frac{25}{2}$ cm^2 og flatarmál minni þríhyrningsins er $\frac{1}{2}3 \times 3$ cm$^2 = \frac{9}{2}$ cm^2. Flatarmál skyggða svæðisins er því $\frac{25}{2}$ cm$^2 - \frac{9}{2}$ cm$^2 = \frac{16}{2}$ cm$^2 = 8$ cm^2.

15) Askur og Embla eru í leik sem er þannig að fyrir sigur í lotu fær sigurvegarinn 2 stig en sá sem tapar fær -1 stig. Til að vinna leikinn þarf 5 stig. Þegar Embla vinnur hefur Askur unnið þrjár lotur. Hve margar lotur léku þau?

☐ 5 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 11

Svar: 7
Lausn: Embla fær -3 stig úr lotunum þremur sem Askur vinnur. Hún hlýtur því 8 stig fyrir þær lotur sem hún vinnur. Þessi 8 stig vinnur hún í fjórum lotum. Þau hafa því leikið 7 lotur.

---

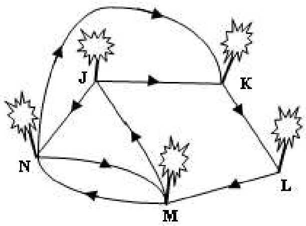
16) Sums staðar er hitastig mælt í Fahrenheit-gráðum. Það má alltaf finna út hitastig á Fahrenheit út frá hitastigi á Celsíus-kvarðanum eftir formúlunni $F = 1,8 \times C + 32$, þar sem F táknar hitastigið á Fahrenheit og C hitastigið á Celsíus. Að morgni dags er hitinn $6°\ C$ og $17°\ C$ í eftirmiðdaginn. Um hve margar gráður á Fahrenheit hefur hitinn hækkað á þessu tímabili?

☐ $6°F$ ☐ $11°F$ ☐ $19,8°F$ ☐ $30,6°F$

Svar: $19,8°\ F$
Lausn: Látum F_m og F_e tákna hitastigið að morgni dags annars vegar og í eftirmiðdaginn hins vegar á Fahrenheit. Þá er hækkunin $F_e - F_m = (1,8 \times 17 + 32) - (1,8 \times 6 + 32) = 1,8 \times (17 - 6) = 1,8 \times 11 = 19,8°F$.

---

17) Api ferðast á milli kókostrjáa eins og myndin sýnir, nákvæmlega einu sinni eftir hverri leið í sömu átt og örin vísar. Hvar hefur apinn för sína og hvar lýkur hann henni?



☐ Hefst í J og lýkur í K ☐ Hefst í K og lýkur í N ☐ Hefst í N og lýkur í M ☐ Hefst í M og lýkur í J

Svar: Apinn hefur förina í J og lýkur henni í K
Lausn: Tökum eftir því að apinn fer tvisvar frá trénu J en kemur aðeins einu sinni að því. Einnig sjáum við að hann kemur tvisvar að trénu K en fer aðeins einu sinni frá því. Að auki veitum við því athygli að hann kemur að trjánum L, M og N jafnoft og hann fer frá þeim. Hann hlýtur því að hefja förina í trénu J og ljúka henni í trénu K.

---

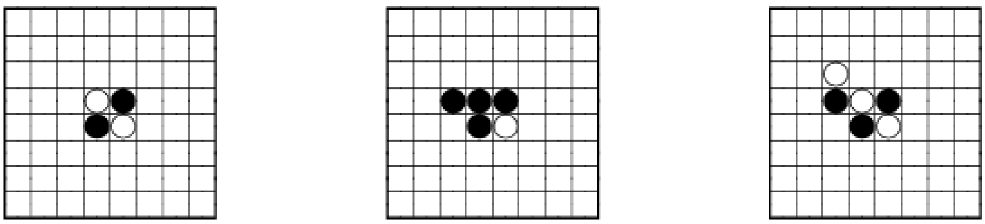
18) Á landakorti jafngildir $2\frac{1}{2}$ cm 300 km. Hve mörgum kílómetrum jafngilda $5\frac{3}{4}$ cm?

☐ 120 km ☐ 300 km ☐ 575 km ☐ 690 km

Svar: 690 km
Lausn: Þar sem $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ þá jafngildir hver sentimetri á kortinu $300/\frac{5}{2} = 300 \times \frac{2}{5} = 120$ km. $5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$ cm jafngilda því $120 \times \frac{23}{4} = 30 \times 23 = 690$ km.

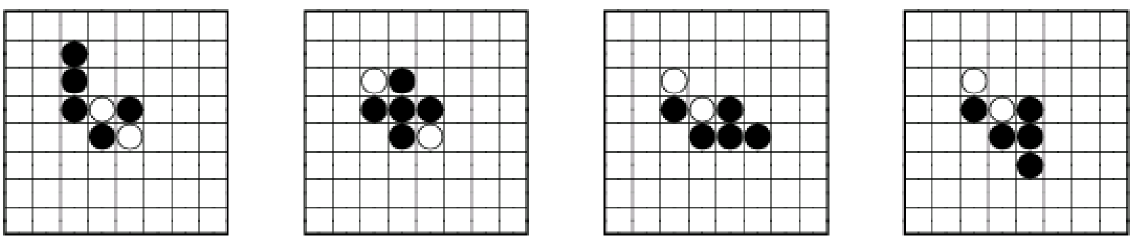
---

19) Í borðleiknum Óþelló skiptast keppendur á að setja einn leikmann í einu á reiti borðsins og hefur svartur leik. Leikur telst löglegur ef leikmaðurinn, sem lagður er niður, er í sömu línu, lárétt, lóðrétt eða á ská, og annar samlitur leikmaður og allir reitirnir á milli þeirra eru mannaðir leikmönnum andstæðingsins. Þeir leikmenn andstæðingsins, sem lenda á milli, skipta síðan um lit, hvítir verða svartir og öfugt. Fyrsta myndin, lengst til vinstri, sýnir upphafsstöðuna, sú næsta sýnir stöðuna eftir fyrsta leik svarts og sú þriðja sýnir stöðuna eftir fyrsta leik hvíts. Hve marga löglega leiki á svartur í sínum öðrum leik?

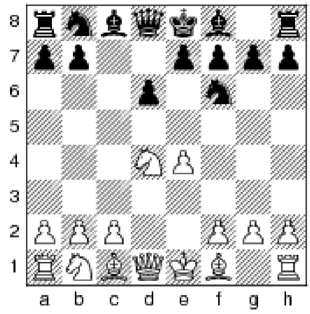


☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10

Svar: 4
Lausn: Möguleikarnir eru fjórir:



20) Sérfræðingar segja að eftir fjóra leiki í skák geti komið upp 197.299 mismunandi stöður. Myndin sýnir eina af þessum stöðum. Friðrik er eitthvað efins og ætlar að ganga úr skugga um að þetta sé rétt. Hvað tekur það Friðrik margar klukkustundir að stilla upp öllum stöðunum ef hann er eina mínútu að leika fjóra leiki, skrá þá niður og raða upp aftur? Svarið er námundað að næsta klukkutíma.



☐ 3.288 ☐ 3.289 ☐ 3.290 ☐ 3.291

Svar: $\underline{3.288}$
Lausn: Friðrik getur stillt upp 60 stöðum á klukkustund. Það tekur hann því $197.299/60 = 3.288\frac{19}{60} \approx 3.288$ klukkustundir að ganga úr skugga um hvort fullyrðingin er rétt.

---

2 Annar hluti

Í þessum hluta eru 5 spurningar. Hver spurning er 6 stiga virði. Hér á aðeins að skrifa svarið.

---

21) Við vitum að $35 \times 65 = 2275$. Hvert verður margfeldið $3,5 \times 6,5$?
Svar: $\underline{22,75}$
Lausn: $3,5 \times 6,5 = \frac{35}{10} \times \frac{65}{10} = \frac{35\times65}{10\times10} = \frac{2.275}{100} = 22,75.$

---

22) Í Bananabúðinni vegur bananahýðið alltaf $1/8$ af þyngd bananas. Kílóverðið er 120 krónur. Hve mikið borgar Binni fyrir bananahýði þegar hann kaupir 4 kg af banönum?
Svar: <u>60 krónur</u>
Lausn: Af hverju kílói af banönum greiðir Binni $120/8 = 15$ krónur fyrir hýði og af 4 kg borgar hann því $4 \times 15 = 60$ krónur fyrir hýðið.

---

23) Randver myndar tölu úr tölustöfunum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 og 8 með því að nota hvern þeirra einu sinni og raða þeim þannig að munurinn milli tölustafa, sem standa hlið við hlið, er a.m.k. tveir. Til dæmis uppfyllir talan 18573642 skilyrðin en 48275631 gerir það ekki. Hver er stærsta talan sem Randver getur fengið út með þessari röðun?

Svar: <u>86473152</u>
Lausn: Til að fá sem stærsta tölu viljum við hafa stærstu tölustafina fremst. Göngum á röðina og veljum alltaf stærsta ónotaða tölustafinn sem uppfyllir skilyrðin. Fyrst kemur því 8, næst 6, þá 4 og síðan 7. Ef næsti tölustafur er 5 þá skipta tölustafirnir 1, 2 og 3 með sér síðustu þremur sætunum sem gengur ekki ef uppfylla á skilyrðin. Veljum því 3 sem næsta tölustaf á eftir 7. Ef 5 kemur á eftir 3 þá sitjum við uppi með tölustafina 1 og 2 fyrir síðustu tvö sætin. Eini möguleikinn til að raða síðustu þremur tölustöfunum er því 152 og stærsta talan, sem Randver getur myndað, er 86473152.

---

24) Í pínupílukasti er aðeins hægt að fá 2, 5, 8 eða 11 stig fyrir hverja pílu. Hver er minnsti fjöldi kasta sem þarf til að ná nákvæmlega 100 stigum?
Svar: <u>11</u>
Lausn: Best að er fá sem flest köst með sem hæstu gildi. Athugum hve oft við getum fengið 11 stig. Ef við fáum 11 stig níu sinnum höfum við fengið 99 stig og getum ekki náð nákvæmlega 100 stigum. Ef við fáum 11 stig átta sinnum höfum við fengið 88 stig og þurfum að athuga hvort við getum fengið 12 stig á einhvern hátt. Það er hægt með því að fá 8 einu sinni og 2 tvisvar. Þetta gera samtals 11 köst.

---

25) Bókstöfunum í orðinu „EULER“ og tölustöfunum í tölunni „1707“ er hringumraðað skref fyrir skref þannig að fyrsti bókstafurinn verður síðasti bókstafurinn og fyrsti tölustafurinn verður síðasti tölustafurinn en hinir færast fram um eitt sæti. Þetta er endurtekið uns bókstafirnir mynda aftur „EULER“ og tölustafirnir „1707“ samtímis. Í hvaða línu lýkur umröðuninni?

$1.$	EULER	1707
$2.$	ULERE	7071
$3.$	LEREU	0717
$\vdots$		

Svar: <u>21. línu</u>
Lausn: Bókstafirnir eru 5 talsins og tölustafirnir 4. Minnsta samfeldi 4 og 5 er 20 sem segir okkur að eftir 20 umraðanir fæst aftur „EULER“ og „1707“ samtímis. Eftir 20 umraðanir erum við í 21. línu.

---

3 Þriðji hluti

Í þessum hluta er eitt dæmi sem er 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

---

26) Fimm börn, Njörður, Skaði, Þór, Sif og Loki eru að leik í leikskólanum Ásgarði. Þegar Óðinn leikskólakennari kíkir til þeirra kemst hann að raun um að eitthvert eitt þeirra hefur brotið rúðu. Óðinn yfirheyrir börnin og fær eina fullyrðingu frá hverju þeirra. Hann veit að aðeins tvö þeirra segja satt en hin ljúga. Hann veit bara ekki hver þeirra segja satt og hver þeirra ljúga. Fullyrðingarnar eru eftirfarandi:

Njörður:	„Hvorki Loki né Þór braut rúðuna.“
Skaði:	„Hvorki ég né Þór braut rúðuna.“
Þór:	„Njörður eða Sif braut rúðuna.“
Sif:	„Loki braut rúðuna.“
Loki:	„Ég braut hana ekki, það var Sif sem braut rúðuna.“

Hvert þeirra braut rúðuna?
Svar: Loki
Lausn: Hafi Njörður brotið rúðuna þá segja Njörður, Skaði og Þór satt en það sögðu aðeins tvö þeirra satt svo Njörður braut ekki rúðuna. Hafi Skaði brotið rúðuna þá ljúga allir nema Njörður. Hafi Þór brotið rúðuna þá ljúga allir og hafi Sif brotið rúðuna þá segja Njörður, Loki og Þór satt sem gengur ekki upp. Ef hins vegar Loki braut rúðuna þá segja Skaði og Sif satt en hin þrjú ljúga. Það var því Loki sem braut rúðuna.