

Stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema**10. mars 2010****10. bekkur****Svör og lausnir****1 Fyrsti hluti**

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði. Krossið við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) Hvert er gildi stæðunnar $\frac{2 \times 0 \times 1 \times 0}{2010}$?

0 1 2 4

Lausn: $\frac{2 \times 0 \times 1 \times 0}{2010} = \frac{0}{2010} = 0$.

2) Kvikmyndasalur hefur 11 raðir, númeraðar frá 1 til 11. Raðir númeraðar með oddatölum hafa 15 sæti og raðir númeraðar með sléttum tölum hafa 16 sæti. Hve mörg sæti eru í kvikmyndasalnum?

165 170 171 176

Lausn: Frá 1 til 11 eru sex oddatölur og fimm sléttar. Kvikmyndasalurinn hefur því $6 \times 15 + 5 \times 16 = 90 + 80 = 170$ sæti.

3) Fjárhirðirinn Kolbeinn telur ær í hjörð. Ærnar eru afar reglusamar. Þær fara í einfalda röð og hoppa síðan hver af annarri yfir girðinguna og inn í réttina. Þrjár ær fara yfir girðinguna á hverri mínútu og þær hefja hoppið á slaginu 14:00. Þegar Kolbeinn hefur talið 42 ær sofnar hann og vaknar ekki fyrr en einum og hálfum tíma síðar. Þá hefur nákvæmlega helmingur ána hoppað yfir girðinguna. Hve margar ær eru í hjörðinni?

618 621 624 630

Lausn: Kolbeinn sefur í 90 mínútur. Á þeim tíma hoppa $90 \times 3 = 270$ ær yfir girðinguna. Áður höfðu 42 vippað sér yfir. Helmingur ána er því $270 + 42 = 312$. Öll hjörðin telur þar með $2 \times 312 = 624$ ær.

4) Eitt sinn var afar uppstökk risaeðla sem hoppaði hvert sem hún fór. Þegar hún hoppaði á vinstri fæti komst hún tvo metra í hverju stökki en með því að hoppa á hægri komst hún fjóra metra í hverju stökki. Enn lengra komst hún með því að hoppa jafnfætis eða sjö metra í hverju stökki. Hver er lágmarksfjöldi stökka sem risaeðlan þurfti til að komast nákvæmlega 1.000 metra?

- 143 144 175 176

Lausn: Því oftast sem hún getur hoppað jafnfætis því færri verða stökk. Taki hún 142 stökk jafnfætis eru hún komin 994 metra. Síðustu 6 metrana kemst hún í fæstum stökkum með því að taka annað á vinstri fæti og hitt á hægri fæti. Lágmarksfjöldi stökka er því 144.

5) Leikur er sagður sanngjarn ef það eru jafnar líkur á að vinna og að tapa. Við köstum einum teningi. Jafnar líkur eru á því að hver hliðanna sex komi upp. Hve margir af eftirtöldum leikjum eru sanngjarnir?

- a) Þú vinnur ef þú færð 2.
 b) Þú vinnur ef þú færð slétta tölu.
 c) Þú vinnur ef þú færð tölu sem er minni en 4.
 d) Þú vinnur ef þú færð tölu sem er deilanleg með 3.

- 1 2 3 4

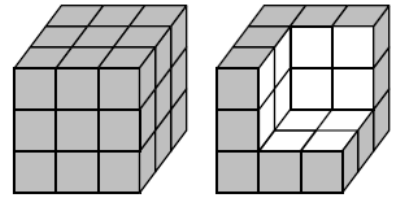
Lausn: Eitt kast hefur sex jafnlíklegar mismunandi útkomur. Leikirnir eru sanngjarnir ef þrjú af köstum leiða til sigurs. Fyrir leik a) er aðeins eitt kast af sex sem leiðir til sigurs. Fyrir leik b) leiða þrjú köst, tvístur, fjarki og sexa, til sigurs og hann er því sanngjarn. Leikur c) er líka sanngjarn þar sem köstin ás, tvístur og þristur leiða til sigurs. Loks sjáum við að leikur d) er ekki sanngjarn því það eru aðeins tvö köst, þristur og sexa, sem leiða til sigurs. Tveir leikjanna er því sanngjarnir en tveir ekki.

6) Á tombólu lækkaði verðið á vörunum um 10% á hverju korteri. Klukkan 9:00 var verðið á persneska teppinu 1.000 krónur. Klukkan 9:15 var verðið komið niður í 900 krónur. Um leið og verðið var komið niður fyrir 800 krónur keypti Nonni níski teppið. Hvað var klukkan þegar Nonni keypti teppið?

- 9 : 30 9 : 45 10 : 00 10 : 15

Lausn: Klukkan 9:30 kostaði teppið $0,9 \times 900 = 810$ og klukkan 9:45 kostaði teppið $0,9 \times 810 = 729$ krónur svo Nonni keypti teppið klukkna 9:45.

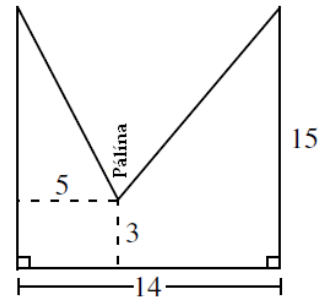
7) Teningur er byggður úr minni teningum eins og myndin til vinstri sýnir. Yfirborð stóra teningsins er málað. Nú lítrar af málningu fara í verkið. Hve marga lítra af málningu þarf til að mála hvíta svæðið á myndinni til hægri?



- 1 lítra 2 lítra 3 lítra 4 lítra

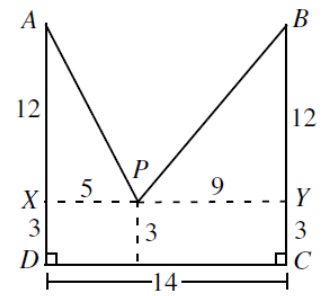
Lausn: Yfirborð stóra teningsins á myndinni til vinstri samanstendur af $9 \times 6 = 54$ hliðarflötum minni teninganna. Við sjáum því að það þarf $\frac{9}{54} = \frac{1}{6}$ lítra til að mála einn lítinn hliðarflöt. Hvíta svæðið á myndinni til hægri samanstendur af 12 litlum hliðarflötum. Það þarf þess vegna $12 \times \frac{1}{6} = 2$ lítra af málningu til að mála þá.

8) Línudansarinn Pálína gleymdi eitt sinn að strekkja almennilega á línunni. Hún lét það ekkert á sig fá og framkvæmdi dansinn óaðfinnanlega. Milli stauranna eru 14 metrar og þeir eru í 15 metra hæð. Venjulega dansar hún 14 metra leið eftir strekktum kaðlinum. Hve löng er leiðin sem hún dansar í þetta skiptið ef myndin sýnir slakann á línunni?



- 26 m 27 m 28 m 29 m

Lausn: Við beitum reglu Pýþagórasar og fáum að $AP = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Jafnframt er $BP = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$. Pálína gengur því $13 + 15 = 28$ metra.

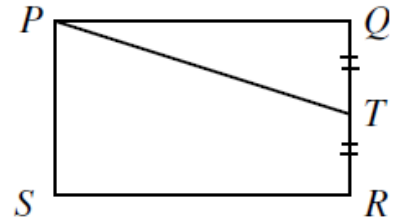


9) Aðgerðin \spadesuit verkar þannig að $a \spadesuit b = a^2 - b^2$. Þannig er $2 \spadesuit 1 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$. Hvað er $(3 \spadesuit 2) \spadesuit 1$?

- 0 5 6 24

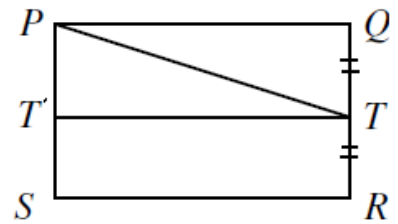
Lausn: $(3 \spadesuit 2) \spadesuit 1 = (3^2 - 2^2) \spadesuit 1 = (9 - 4) \spadesuit 1 = 5 \spadesuit 1 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$.

10) Flatarmál rétthyrningsins $PQRS$ á myndinni er 24. Fjarlægðin milli T og Q er sú sama og fjarlægðin milli T og R . Hvert er flatarmál trapisunnar $PTRS$?

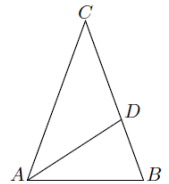


- 6 15 16 18

Lausn: Flatarmál rétthyrningsins $PQTT'$ er helmingur $PQRS$ eða 12. Þríhyrningurinn $\triangle PQT$ hefur síðan hálf flatarmál á við $PQTT'$ eða 6. Trapisan $PTRS$ hefur loks flatarmál rétthyrningsins $PQRS$ að frádrögnum flatarmáli þríhyrningsins $\triangle PQT$ eða $24 - 6 = 18$.



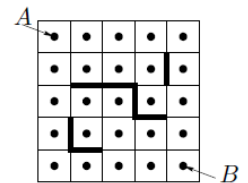
11) Þríhyrningurinn á myndinni er jafnarma með $|AC| = |BC|$. Línustrikið $|AD|$ helmingar hornið $\angle BAC$ og $|AD| = |AB|$. Hve stórt er hornið $\angle C$?



- 30° 36° 45° 60°

Lausn: Látum $2x$ vera hornið $\angle BAC$. Þá er hornið $\angle ABC$ líka $2x$ og $\angle BAD = x$. Þar sem þríhyrningurinn $\triangle ABD$ er jafnarma þá er hornið $\angle ADB = 2x$ eins og $\angle ABC$. Út frá hornasummu þríhyrningsins $\triangle ABD$ fáum við $x + 2x + 2x = 180^\circ$ eða $5x = 180^\circ$ og þá $x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$. Hornið $\angle C$ fæst þar með út frá hornasummu þríhyrnings og er $180^\circ - (2x + 2x) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

12) Myndin sýnir 5×5 borð með hindrunum. Takmarkið er að fara frá reit A til B . Aðeins má fara til hægri eða niður á milli reita og ómögulegt er að fara í gegnum hindrun. Hve margar leiðir frá A til B uppfylla þessi skilyrði?



- 8 9 11 12

Lausn : Skrifum í hvern reit fjölda leiða í þann sama reit og byrjum á reit A . Vinnum okkur síðan áfram reit fyrir reit. Sjáum að gildið sem við skrifum í hvern reit eftir A er summa gildanna í reitunum næst á undan, þ.e. fyrir ofan og til vinstri. Ef ekki er hægt að komast í reit nema annaðhvort frá vinstri eða að ofan þá fær sá reitur sama gildi og sá sem komið var frá.

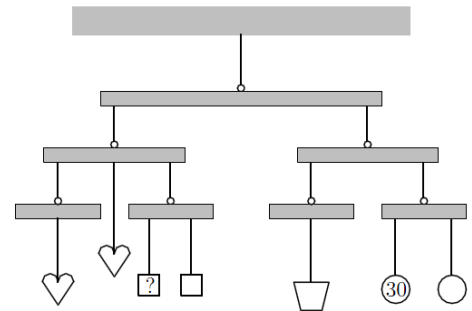
1	1	1	1	1
1	2	3	4	1
1	1	1	4	5
1	1	2	2	7
1	1	3	5	12

13) Hver af neðantöldum talnaþrenndum er þeim eiginleikum gædd að miðtalan er jafnlangt frá hinum tveimur?

- $\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ 12; 21; 32 $\frac{1}{8}; \frac{9}{80}; \frac{1}{10}$ 0, 3; 0, 7; 1, 3

Lausn: Við athugum meðtaltal fyrstu og þriðju tölunnar. Ef það er jafnt miðtölunni þá er sú jafnlangt frá hinum tveimur. Í fyrsta valmöguleika er meðaltalið $(\frac{1}{3} + \frac{1}{5})/2 = \frac{8}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$ sem er ekki jafnt $\frac{1}{4}$. Fyrir annan valmöguleika er meðaltalið $\frac{1}{2}(12 + 32) = \frac{44}{2} = 22$ sem stemmir ekki og í fjórða valmöguleika fæst meðaltalið $\frac{1}{2}(0, 3 + 1, 3) = \frac{1,6}{2} = 0, 8$. Eini möguleikinn er því sá þriðji og hann stemmir þar sem $(\frac{1}{8} + \frac{1}{10})/2 = \frac{1}{2} \times \frac{18}{80} = \frac{9}{80}$.

14) Myndin sýnir jólaóróann hans Georgs. Óróinn er í jafnvægi og skraut sem hefur sams konar form vegur jafn mörg grömm. Hringlaga skrautið vegur 30 grömm. Hve mikið vegur ferningslaga skrautið?



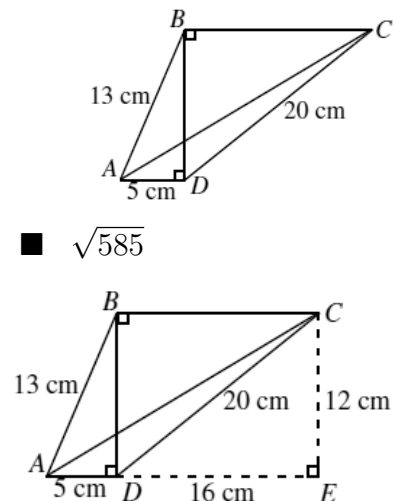
- 10 20 30 40

Lausn: Látum H standa fyrir þyngd hjartalaga skrautsins, F fyrir ferningslaga skrautið, T fyrir skrautið sem ber form trapisu og R fyrir hringlaga skrautið. Við sjáum að $R = 30$ g og því $T = 2 \times 30 = 60$ g. Tökum eftir því að skrautið sem er vinstra megin við miðju er jafnpungt því sem er hægra megin og fáum að $2 \times H + 2 \times F = T + 2 \times R$ sem gefur $2 \times H + 2 \times F = 60 + 60 = 120$ g. Til að jafnvægi sé vinstra megin verður $H = 2 \times F$. Ef við stingum því inn í jöfnuna $2 \times H + 2 \times F = 120$ g fáum við að $2 \times 2 \times F + 2 \times F = 120$ g eða $6F = 120$ g sem gefur okkur að $F = \frac{120}{6} = 20$ g.

15) Á myndinni er $AB = 13$ cm, $DC = 20$ cm og $AD = 5$ cm. Hve langt er línustrikið AC ?

- $\sqrt{555}$ $\sqrt{565}$ $\sqrt{575}$ $\sqrt{585}$

Lausn: Við byrjum á að reikna lengdina á DB sem er $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. Finnum næst lengdina á $DE = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$ cm. Því næst fáum við að $AC = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{441 + 144} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$.



2 Annar hluti

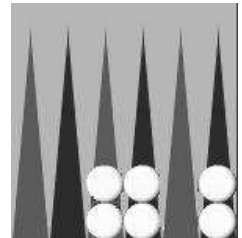
Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði. Hér á aðeins að skrifa svarið.

16) Amma Ísbjörg bakar smákökur fyrir barnabörnin sín. Ef hún gefur hverju barnabarni tvær kökur þá verða þrjár eftir. Þegar hún reynir að gefa hverju barnabarni þrjár kökur þá vantar tvær til að þau fái öll þrjár kökur. Hve mörg barnabörn á amma Ísbjörg?

Svar: 5

Lausn: Látum B vera fjölda barnabarna og K fjölda smákaka. Þá er $K = 2B + 3$ og $K = 3B - 2$ og því $2B + 3 = 3B - 2$ sem gefur $3B - 2B = 2 + 3$ eða $B = 5$. Barnabörnin eru því fimm talsins og amma Ísbjörg bakaði 13 smákökur.

17) Í kotru kasta keppendur tveimur teningum og færa leikmenn sína eftir hvert kast. Myndin sýnir heimaborð hvíts. Svartur er með einn mann útaf og til að komast með manninn inn í næsta kasti þarf hann að fá upp þrist, fimmu eða sexu á a.m.k. annan teninginn. Hverjar eru líkurnar á að svartur komist inn í næsta kasti?



Svar: $\frac{3}{4}$

Lausn: Reiknum fyrst líkurnar á því að svartur komist ekki inn. Fyrir hvorn tening eru líkurnar $\frac{3}{6}$ á að fá ekki þrist, fimmu eða sexu. Líkurnar á því að fá þrist, fimmu eða sexu á hvorugan teninginn eru $\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$. Líkurnar á því að komast inn eru þá $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

18) Ari, Björn og Sigurður skrifa tölurnar frá einum til og með 2010 í reikningsbókina hennar Þórunnar. Ari stríkar undir allar tölur sem eru deilanlegar með tveimur, Björn stríkar undir allar tölur sem eru deilanlegar með þremur og Sigurður stríkar undir allar tölur sem eru deilanlegar með fjórum. Þórunn býður strákunum að hún muni ekki refska þeim ef þeir geti sagt sér undir hve margar tölur sé strikað þrisvar. Á hvaða tölu eiga bræðurnir að giska?

Svar: 167

Lausn: Það er strikað þrisvar undir allar tölur sem eru deilanlegar með tveimur, þremur og fjórum, þ.e.a.s. allar tölur sem eru deilanlegar með 12. Við höfum $2010/12 = 167,5$ og því eru 167 tölur á bilinu 1 til 2010 sem eru deilanlegar með 12.

19) Hver er næsta talan í rununni 1, 4, 13, 40, ____?

Svar: 121

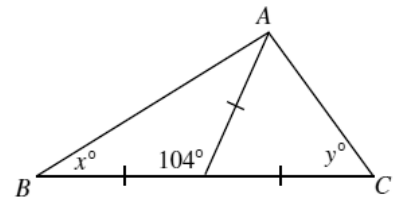
Lausn: Tölurnar í rununni, öll nema sú fyrsta, eru einum hærri en þreföld talan næst á undan. Næsta tala er því $3 \times 40 + 1 = 121$.

20) Fullt glas af vatni vegur 1.000 g. Þegar helmingur vatnsins hefur verið drukkin vegur glasið með vatninu 700 g. Hve þungt er glasið tómt?

Svar: 400 g

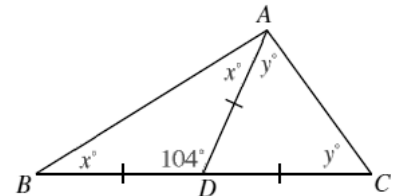
Lausn: Látum x vera þyngd glassins og y þyngd vatnsins þegar glasið er fullt. Þá er $x + y = 1.000$ og $x + \frac{y}{2} = 700$. Einangrum y í báðum jöfnunum og fáum $y = 1.000 - x$ og $y = 1.400 - 2x$. Jöfnurnar gefa okkur $1.000 - x = 1.400 - 2x$ og þá $2x - x = 1.400 - 1.000$ sem gefur okkur þyngd glassins $x = 400$ g.

21) Á myndinni eru línurnar með stuttu þverstríkunum allar jafnlangar. Hver er summa x og y ?



Svar: 90

Lausn: Þríhyrningurinn $\triangle ABD$ er jafnarma og þess vegna er hornið $\angle BAD = x^\circ$. Á sama hátt er þríhyrningurinn $\triangle ADC$ jafnarma og því hornið $\angle DAC = y^\circ$. Hornasumma þríhyrningsins $\triangle ABC$ gefur síðan að $x + x + y + y = 180$ en þá er $x + y = \frac{180}{2} = 90$.



22) Með körfuboltaliðinu Goggunum spila tvíburarnir Júlíus og Ágúst. Þeir eru báðir í byrjunarliðinu ásamt þremur öðrum. Í upphafi leiks hleypur byrjunarliðið inn á völlinn í einfaldri röð. Þannig er mál með vexti að Júlíus fæddist tveimur mínútum á undan Ágústi og heimtar því að fá að hlaupa á undan bróður sínum inn á völlinn. Á hve marga vegu geta leikmenn byrjunarliðsins stillt sér upp í einfalda röð þannig að Júlíus hlaupi alltaf á undan Ágústi inn á völlinn?

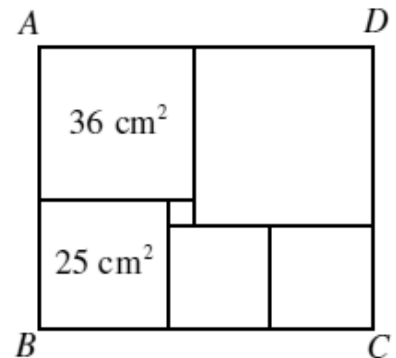
Svar: 60

Lausn: Við byrjum á að stilla tvíburunum í röðina. Þegar þeir hafa fundið sér stað höfum við alltaf $3 \times 2 \times 1 = 6$ möguleika til að raða hinum þremur upp. Ef Júlíus er fremstur eru 4 möguleikar fyrir Ágúst og þá $4 \times 6 = 24$ möguleikar alls. Ef Júlíus er annar eru 3 möguleikar fyrir Ágúst og þá $3 \times 6 = 18$ möguleikar alls. Ef Júlíus er þriðji eru tveir möguleikar fyrir Ágúst og þá $2 \times 6 = 12$ möguleikar alls. Ef Júlíus er fjórði er aðeins einn möguleiki fyrir Ágúst og þá $1 \times 6 = 6$ möguleikar alls. Allt í allt er því hægt að raða þeim upp á $24 + 18 + 12 + 6 = 60$ vegu.

3 Þriðji hluti

Í þessum hluta eru tvö dæmi sem er 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

23) Myndin sýnir rétthyrning sem hefur verið skipt niður í sjö ferninga. Flatarmál tveggja af sjö ferningum er sýnt. Hvert er ummál rétthyrningsins $ABCD$?



Lausn: Hliðalengd ferningsins sem hefur flatarmálið 25 cm^2 er 5 cm og hliðalengd ferningsins sem hefur flatarmálið 36 cm^2 er 6 cm. Við sjáum að þá hefur litli ferningurinn í miðjunni hliðalengdina 1 cm en þar með hefur ferningurinn uppi til hægri hliðalengdina 7 cm. Þetta eru nægar upplýsingar því við sjáum að hliðin AB hefur lengdina $5 + 6 = 11$ cm og hliðin AD hefur lengdina $6 + 7 = 13$ cm. Ummál $ABCD$ er því $2 \times (11 + 13) = 2 \times 24 = 48$ cm.

24) Í spilinu Tic Tac Toe eru tveir keppendur, X og O. X hefur leikinn og leggur sitt mark í einn þeirra níu reita sem í upphafi eru auðir. Næst leggur O sitt mark í einhvern reitanna átta sem þá eru auðir. Þannig er leikið koll af kolli þangað til annar hefur náð að mynda þrennu, þ.e. lárétta línu, lóðrétta dálk eða hornalínu með sínu marki. Niðurstaðan er jafntefli þegar borðið er fyllt og hvorugur keppenda hefur náð þrennu. Efri myndin sýnir mögulega lokastöðu. Gefum okkur að X leggi í upphafi sitt mark í miðjuna. Sannið að X geti alltaf unnið ef O leggur sitt fyrsta mark í miðreitinn á einhverri hliðinni, þ.e. einn grálitu reitanna.

X	O	
X	X	X
O		O
	X	

Lausn: Vegna samhverfu megum við gera ráð fyrir að O hafi lagt sitt mark í miðreitinn í efstu röð. Hafi hann lagt markið í einhvern annan miðreit snúum við borðinu þangað til línan sem markið liggur í er orðin efsta línan. Sigurleiðirnar eru nokkrar. Ein þeirra er sú að X leggur næst í miðreitinn til vinstri. O er þá þvingaður til að leggja sitt mark í miðreitinn til hægri. Ef ekki þá vinnur X með því að leggja sitt mark í miðreitinn til hægri í næsta leik. Eftir að O leggur sitt mark í miðreitinn til hægri þá leggur X sitt í reitinn efst til vinstri og hefur nú tvo reiti til að klára þrennuna, þá grálitu. O getur ekki varist á tveimur vígstöðvum og verður að játa sig sigraðan.

X	O	
X	X	O