Stærðfræðikeppni fyrir grunnskólanema
16. mars 2011
9. bekkur

Svör og lausnir

1 Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 18 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði. Krossið við rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

---

1) Hvert er gildi stæðunnar $2 + 0 + 1 + 1 + 2011$?

☐ 8 ☐ 2012 ■ 2015 ☐ 4022

Lausn: $2 + 0 + 1 + 1 + 2011 = 2015$.

---

2) Stór ís með dýfu kostar 300 krónur í Ísbúðinni. Lítill ís með dýfu er hundrað krónum ódýrari. Pétur kaupir ís fyrir sjálfan sig, börnin sín þrjú og hundinn. Hann fær sér stóran ís með dýfu en börnin fá sér lítinn ís. Hundurinn fær að sjálfsögðu stóran ís. Hve mikið þarf Pétur að greiða fyrir ísana?

☐ 900 ☐ 1100 ■ 1200 ☐ 1500

Lausn: Pétur borgar $2 \times 300 + 3 \times 200 = 1200$ krónur.

---

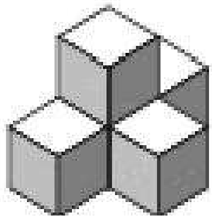
3) Steinn er mikill áhugamaður um tímann og stríðinn með eindæmum. Aðalsteinn deilir ekki þessum áhuga en kemst ekki hjá því að spyrja Stein öðru hverju hvað tímanum líði. Eitt sinn þegar Aðalsteinn þarf að vita hvað klukkan er spyr hann Stein. Steinn svarar að tveimur tímum fyrr hafi verið sjö og hálf klukkustund til miðnættis. Hvað er klukkan þegar Aðalsteinn spyr?

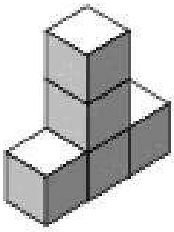
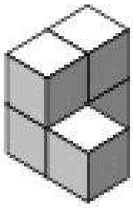
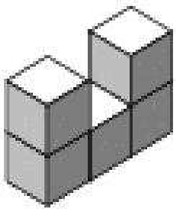
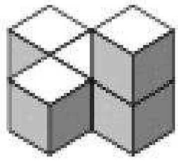
☐ 14:30 ☐ 16:30 ■ 18:30 ☐ 20:30

Lausn: Það eru $7,5 - 2 = 5,5$ klukkutímar til miðnættis og klukkan því 18:30.

---

4) Hanna setur saman fimm kubba eins og myndin sýnir. Óla finnst gaman að breyta því sem Hanna gerir og færir til einn kubbanna. Hverja af eftirtöldum kubbastæðum getur Óli ekki myndað?



☐  ☐  ■  ☐ 

Lausn: Til að mynda þriðju kubbastæðuna þarf að færa til minnst tvo kubba. Hinar kubbastæðurnar er hægt að mynda með því að færa til aðeins einn kubb.

---

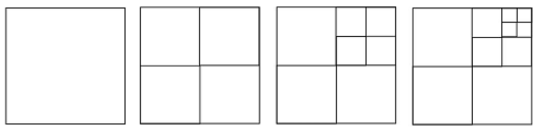
5) Hve margar tveggja stafa tölur eru þannig að hægri tölustafurinn er stærri en sá vinstri?

☐ 9 ☐ 18 ☐ 30 ■ 36

Lausn: Þegar hægri tölustafurinn er níu þá eru getum við valið vinstri tölustafinn á átta vegu. Þegar hægri tölustafurinn er átta getum við valið þann vinstri á sjö vegu o.s.frv. Þegar hægri tölustafurinn er tveir getur vinstri tölustafurinn aðeins verið einn. Þetta eru samtals $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ tölur.

---

6) Myndarunan sýnir mynstur af ferningum. Fyrir utan fyrstu myndina er mynstur hverrar myndar gert úr mynstri myndarinnar næst á undan þannig að ferningurinn efst til hægri breytist í fjóra smærri ferninga. Á fyrstu myndinni er einn ferningur, á annarri myndinni eru fjórir ferningar, sjö á þeirri þriðju og tíu á fjórðu myndinni. Hve margir ferningar yrðu á fimmtu myndinni?

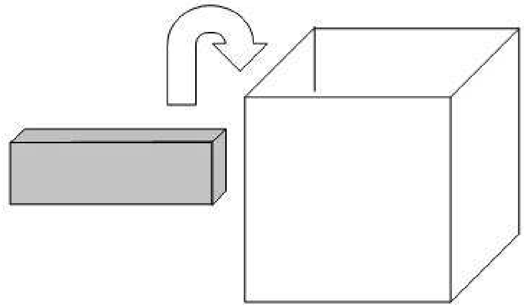


☐ 11 ☐ 12 ■ 13 ☐ 14

Lausn: Fyrir hverja nýja mynd breytist einn ferningur á myndinni næst á undan í fjóra smærri ferninga. Ferningunum fjölgar um þrjá í hverju skrefi. Á fimmtu myndinni yrðu því 13 ferningar.

---

7) Guðrún ætlar að raða nokkrum gullstöngum í kassa. Kassinn er $4 \times 4 \times 4$ metrar, þ.e. hann er teningslaga með brúnalengdina 4 m. Stangirnar eru $1 \times 2 \times 4$ metrar. Hve mörgum gullstöngum kemur Guðrún fyrir í einum kassa?



☐ 6 ☐ 7 ■ 8 ☐ 9

Lausn: Rúmmál kassans er $4 \times 4 \times 4 = 64$ m^3. Rúmmál einnar gullstangar er $4 \times 2 \times 1 = 8$ m^3. Við getum því í mesta lagi komið $\frac{64}{8} = 8$ gullstöngum í kassann. Með því að leggja tvær gullstangir hlið við hlið á botn kassans getum við þakið grunnflötinn. Með því að leggja þrjár hæðir til viðbótar á þennan hátt höfum við fyllt kassann og komið átta gullstöngum fyrir.

---

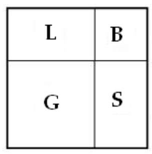
8) Í fangelsi nokkru eru fangarnir merktir með ólíkum þriggja stafa númerum. Fangavörðurinn er hjátrúarfullur með eindæmum og vill ekki sjá sléttar tölur. Hann setur því það skilyrði að enginn tölustafanna í fanganúmerunum sé slétt tala. Hve mögum föngum er hægt að troða í fangelsið þangað til skipta þarf um fangavörð?

■ 125 ☐ 300 ☐ 500 ☐ 1000

Lausn: Hvern tölustaf fanganúmers er hægt að velja á fimm vegu, þ.e. 1, 3, 5, 7 og 9. Það eru því hægt að útbúa $5 \times 5 \times 5 = 125$ ólík þriggja staf fanganúmer.

---

9) Myndin sýnir hvernig ferningslaga garður Ásbjörns lítur út. Á lóðinni er sundlaug (L), blómabeð (B), grasblettur (G) og sandkassi (S). Grasbletturinn og blómabeðið eru ferningaslaga. Ummál grasblettsins er 20 metrar og ummál blómabeðsins er 12 metrar. Hvert er ummál sundlaugarinnar?



☐ 10 m ☐ 12 m ☐ 14 m ■ 16 m

Lausn: Fyrst blómabeðið er ferningaslaga þá er hver hlið beðsins $\frac{12}{4} = 3$ metrar á lengd. Úr því grasbletturinn er líka ferningslaga hlýtur hver hlið hans að vera $\frac{20}{4} = 5$ metrar. Þannig sjáum við að langhlið sundlaugarinnar er 5 metrar og skammhlið hennar er 3 metrar. Ummál sumdlaugarinnar er því $2 \times (3 + 5) = 16$ metrar.

---

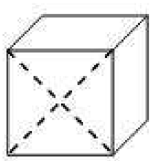
10) Aðgerðin Δ virkar þannig að $a\Delta b = \frac{a}{b+1}$. Til dæmis er $2\Delta 1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$. Hvað er $(5\Delta 4)\Delta 1$?

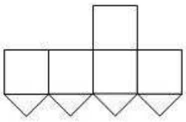
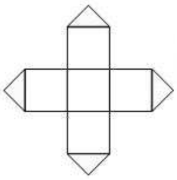
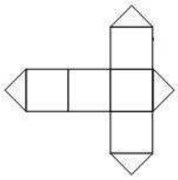
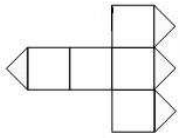
☐ $\frac{1}{5}$ ■ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 20

Lausn: $(5\Delta 4)\Delta 1 = \left(\frac{5}{4+1}\right)\Delta 1 = 1\Delta 1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

---

11) Ein hlið tenings er klippt eftir hornalínum einnar hliðarinnar eins og myndin sýnir. Teningurinn er síðan flattur út. Hver af eftirtöldum myndum getur ekki verið af teningnum?

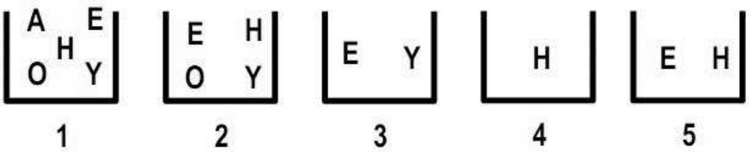


☐  ☐  ■  ☐ 

Lausn: Á þriðju myndinni lenda klipptu fliparnir ekki saman á sama fletinum þegar við brjótum teninginn saman aftur. Á hinum myndunum lenda klipptu fliparnir saman á sama fletinum og við getum myndað tening.

---

12) Myndin sýnir fimm bókstafakassa. Ásta ætlar að koma reglu á stafina. Hún ætlar að fjarlægja bókstafi úr kössunum þannig að eftir standi aðeins einn bókstafur í hverjum kassa og ólíkir kassar innihaldi ólíka bókstafi. Hvaða bókstafur verður eftir í kassa tvö?



☐ A ☐ E ■ O ☐ Y

Lausn: Bókstafurinn H verður í kassa fjögur. Við getum því fjarlægt H úr hinum kössunum. Þá sjáum við að E verður að vera í kassa fimm og við fjarlægjum E úr öðrum kössum. Þá er Y í kassa þrjú og eftir að við fjarlægjum Y úr öðrum kössum stendur eftir O í kassa tvö. Loks stendur A eftir í kassa eitt eftir að við höfum fjarlægt O þaðan.

---

13) Í stórri veislu er hringborð með 60 stólum, í sumum er setið en aðrir eru auðir. Eitthvað virðast gestirnir lykta illa því á milli sérhverra tveggja sem sitja við borðið eru nákvæmlega tveir auðir stólar. Hve margir gestir sitja við borðið?

☐ 19 ■ 20 ☐ 21 ☐ 30

Lausn: Við getum myndað þrennd með einum gesti og tveimur auðum stólum, táknum það með GAA. Með því að raða 20 svona þrenndum við hringborðið hlífum við viðkvæmu lyktarskyni gestanna, þ.e. við fáum GAA-GAA-GAA-...GAA. Í hverri þrennd er einn gestur svo gestirnir við borðið eru 20 talsins.

---

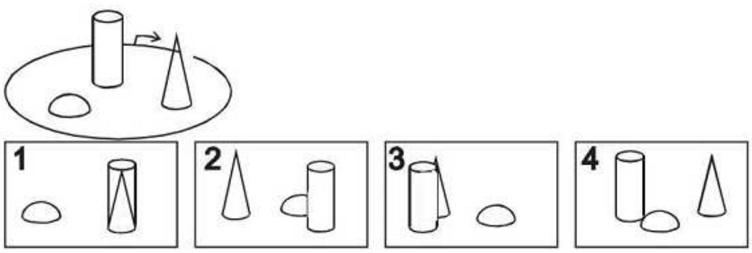
14) Eftir að hafa leyst margfeldið 999999×666666 reiknar Sæmundur út summu tölustafanna í útkomunni. Hver er summan?

■ 54 □ 63 □ 72 □ 81

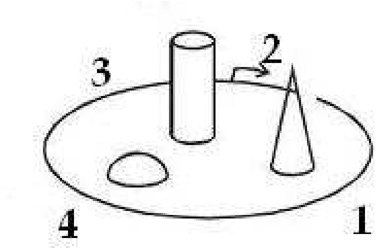
Lausn: Margfeldið er $999999 \times 666666 = (1000000 - 1) \times 666666 = 666666000000 - 666666 = 666665333334$ og þversumman er $5 \times 6 + 5 + 5 \times 3 + 4 = 30 + 5 + 15 + 4 = 54$.

---

15) Silja gengur einn hring í kringum rúmfræðigarðinn eins og myndin sýnir. Hún tekur fjórar myndir á leiðinni. Hver af eftirtöldum möguleikum getur sýnt í hvaða röð hún tók myndirnar?



□ $2-4-3-1$ □ $4-2-1-3$ ■ $2-1-4-3$ □ $2-1-3-4$



Lausn: Merkjum inn hvar hún tók hverja mynd. Þá sjáum við að eini möguleikinn er $2-1-4-3$.

---

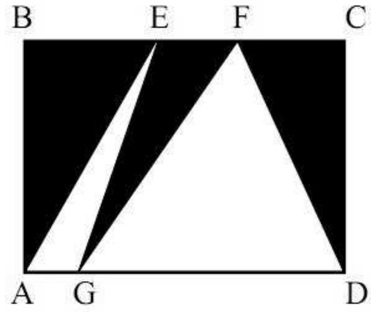
16) Sjö kúlur eru í poka. Þær eru númeraðar frá einum upp í sjö. Freyja dregur af handahófi þrjár kúlur úr pokanum og Freyr tvær. Nú fullyrðir Freyja að summa talnanna, sem eru á kúlum Freys, sé slétt tala. Hver er summa talnanna á kúlum Freyju?

□ 9 □ 10 ■ 12 □ 15

Lausn: Til að Freyja geti fullyrt að summa talnanna á kúlum Freys sé slétt tala þarf hún að vera viss um að báðar séu sléttar tölur eða báðar oddatölur. Eina leiðin til þess er að hún hafi sjálf dregið allar sléttu tölurnar í upphafi. Summa talnanna á kúlum Freyju er því $2 + 4 + 6 = 12$.

---

17) Á myndinni er rétthyrningur $ABCD$ með hliðarlengdirnar $AD = 12$ og $AB = 7$. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



☐ 35 ■ 42 ☐ 49 ☐ Ekki hægt að ákvarða

Lausn: Flatarmál óskyggða svæðisins er summa flatarmáls þríhyrninganna $\triangle AEG$ og $\triangle GFD$. Hæð beggja þríhyrninganna er $AB = 7$ og summa flatarmálanna er $\frac{AG\times 7}{2} + \frac{GD\times 7}{2} = \frac{(AG+GD)\times 7}{2} = \frac{12\times 7}{2} = 42$. Flatarmál skyggða svæðisins er því $12 \times 7 - 42 = 42$.

---

18) Talnarunan $1, 3, 4, 7, 11, 18$, ... er mynduð þannig að fyrst eru skrifaðar niður tölurnar 1 og 3. Síðan er hver tala í rununni summa næstu tveggja talna á undan. Hver verður afgangurinn þegar deilt er í þúsundustu töluna í rununni með 5?

☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4

Lausn: Við getum leyft okkur að skoða rununa einungis út frá afgangi þegar deilt er með 5. Þá verður runan $1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2$, ... Hún verður lotubundin með lotuna fjóra. Það þýðir að tölur í rununni númer $1, 5, 9, 13$, ... hafa allar afganginn 1; tölur í rununni númer $2, 6, 10, 14$, ... hafa allar afganginn 3 o.s.frv. Tala númer þúsund í rununni hefur því sama afgang þegar deilt er í hana með 5 og tala númer fjögur í rununni. Afgangurinn er sem sagt 2.

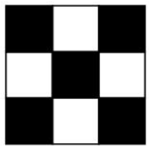
---

2 Annar hluti

Í þessum hluta eru 6 spurningar. Hver spurning er 6 stiga virði. Hér á aðeins að skrifa svarið.

---

19) Myndin sýnir smákborð - sem er smátt skákborð. Magnús á að leysa skákþraut sem felst í því að staðsetja smókinn, þ.e. smáhrókinn, á einhvern reita smákborðsins þannig að hann geti komið við á öllum reitum borðsins nákvæmlega einu sinni. Smókurinn gengur þannig að hann má færa á næsta aðliggjandi reit, þó ekki á ská. Magnús nennir nú ekki að velta þessu mikið fyrir sér heldur giskar út í loftið á einhvern reitanna. Hve margir af reitunum níu gefa Magnúsi rétt svar?

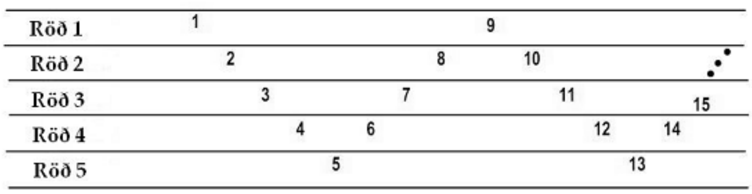


Svar: 5

Lausn: Við tökum eftir að sé smókurinn á svörtum reit þá fer hann næst á hvítan og öfugt. Af reitunum níu eru fimm svartir. Til að geta komið við á öllum reitunum verður smókurinn því að byrja á svörtum reit. Þeir hvítu eru því út úr myndinni. Ef við byrjum með hann á svarta reitnum efst til vinstri þá er ein lausnin þannig að við færum smókinn tvisvar til hægri, þá niður, tvisvar til vinstri, niður og loks tvisvar til hægri. Ef við byrjum í einhverjum öðrum hornreit þá getum við ímyndað okkur að við snúum borðinu þangað til sá reitur er efst til vinstri og notað sömu lausn og áður. Loks sjáum við að ef smókurinn byrjar í miðreitnum getum við fært hann fyrst til vinstri, þá upp, tvo til hægri, tvo niður og að endingu tvo reiti til vinstri. Allir svörtu reitirnir eru því lausn á þrautinni og þeir eru fimm talsins.

---

20) Tölur eru skrifaðar með sikk-sakk mynstri á blað eins og myndin sýnir. Í hvaða röð kemur talan 800 fyrir?

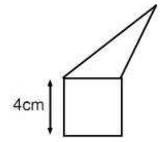


Svar: Annarri röð.

Lausn: Í fyrstu röðinni eru tölurnar 1, 9, 17, ..., þ.e. þær tölur sem hafa afganginn einn þegar deilt er í þær með átta. Það gefur okkur að talan 801 sé í fyrstu röðinni. Talan 800 er því í annarri röðinni.

---

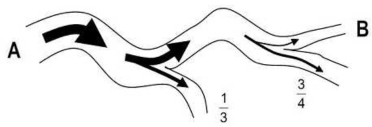
21) Myndin sýnir ferning og þríhyrning sem hafa sama ummál. Hvert er ummál fimmhyrningsins sem ferningurinn og þríhyrningurinn mynda?



Svar: 24 cm
Lausn: Ummál ferningsins er $4 \times 4 = 16$ cm. Ummál þríhyrningsins er það sama. Þegar ummál fimmhyrningsins er reiknað reiknum við ekki með hliðarnar sem eru samliggjandi. Þessar hliðar hafa hvor um sig lengdina 4 cm. Fimmhyrningurinn hefur því ummálið $(16-4)+(16-4) = 24$ cm.

---

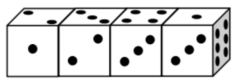
22) Myndin sýnir hvernig keppendur í ratleik skiluðu sér í mark. Rásmarkið er merkt með A og endamarkið með B. Tvisvar reyndi verulega á keppendur og í bæði skiptin villtist töluverður hópur af leið. Í fyrra skiptið villtist þriðjungur keppenda af leið og í síðara skiptið villtust $3/4$ af þeim sem enn voru á réttri leið. Hve stór hluti keppendanna komst í mark?



Svar: $1/6$
Lausn: Fyrst villist þriðjungur keppenda, þá eru $2/3$ enn á réttri leið. Síðan villast $3/4$ af þeim hópi. Fjöldi keppenda, sem náði í mark, var því $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

---

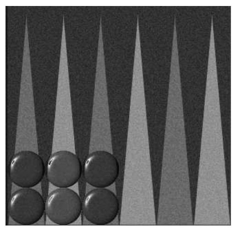
23) Myndin sýnir fjóra eins teninga. Hliðarfletir teninganna bera tölurnar 1, 2, 3, 4, 5 og 6, eina á hverri hlið. Eins og sjá má eru þetta ekki dæmigerðir teningar með summu mótlægra hliða jafna sjö. Hver er summa talnanna á hliðarflötunum sem ekki sjást?



Svar: 59
Lausn: Heildarsumma talnanna á einum teningi er $1+2+3+4+5+6 = 21$. Heildarsumma talnanna á fjórum teningum er því $4 \times 21 = 84$. Summa talnanna, sem við sjáum, er $1+2+2+3+3+4+3+1+6 = 25$. Þá er summa talnanna sem við sjáum ekki $84-25 = 59$.

---

24) Daníel og Jón spila kotru. Á myndinni sést heimaborð Daníels. Jón er með einn leikmanninn út af. Hann kastar tveimur teningum og til að koma leikmanninum aftur inn á þarf hann að fá ás, tvist eða þrist á a.m.k. annan af teningunum. Hverjar eru líkurnar á að það takist?



Svar: $3/4 = 75\%$
Lausn: Byrjum á að reikna líkurnar á að Jón komi leikmanninum ekki inn á. Til að það gerist verður hann að fá fjóra eða hærra á báða teningana. Líkurnar á að fá fjóra eða hærra á einn tening er $3/6 = 1/2$. Líkurnar á að það fáist á báða í einu eru því $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$. Líkurnar á að Jón komi leikmanninum inn á eru því $100\% - 25\% = 75\%$ eða $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

---

3 Þriðji hluti

Í þessum hluta er eitt dæmi sem er 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu.

---

25) Jóakim kaupir sex gullpeninga eða það heldur hann. Raunin er hins vegar sú að þrír þeirra eru ekki úr gulli og því léttari en hinir. Þar sem Jóakim tímir ekki að leita aðstoðar sérfræðinga er hans eina leið að notast við gamla vog sem hann fékk eitt sinn gefins. Hver er lágmarksfjöldi vigtana sem Jóakim þarf til að finna einn falsaðan gullpening. Rökstyðjið af hverju

Lausn: Byrjum á að velja fjóra peninga og setjum tvo í hvora skál vogarinnar. Meðal þessara fjögurra peninga eru a.m.k. einn falsaður og a.m.k. einn ófalsaður. Ef vogin er ekki í jafnvægi er falsaður peningur í léttari skálinni. Setjum peningana tvo, sem eru í léttari skálinni, í sitt hvora skálina. Ef önnur skálin er nú léttari þá inniheldur hún falsaðan pening. Ef skálarnar eru hins vegar í jafnvægi þá eru báðir falsaðir. Ef vogin er aftur á móti í jafnvægi við fyrstu vigtun þá er einn falsaður og einn ófalsaður í hvorri skál. Setjum peningana úr annarri skálinni í sitt hvora skálina og sú léttari inniheldur falsaðan pening. Við þurfum því ekki fleiri en tvær vigtanir og ekki er hægt að finna falsaðan pening með einni vigtun. Þar með höfum við sýnt að tveir er lágmarksfjöldi vigtana til að finna einn falsaðan gullpening.
