

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans

fyrir grunnskólanema

23. febrúar 2005

10. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 15 dæmi. Hvert dæmi er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) 60% af 200 er

12

30

60

120

Svar: 60% eru $\frac{60}{100} = 0,6$ og þá fæst að $0,6 \times 200 = 120$.

2) Ef $y = \frac{6}{4-x}$ og $x = -2$ þá er y jafnt

1

2

3

4

Svar: Ef $x = -2$, þá er $y = \frac{6}{4-x} = \frac{6}{4-(-2)} = \frac{6}{6} = 1$.

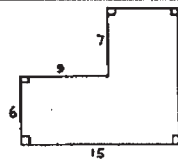
3) Á myndinni eru lengdir hliðanna sýndar.
Hvert er ummál myndarinnar?

195

56

50

28



Svar: Hæð myndarinnar er $6+7=13$ og breidd hennar er 15. Ummálið er því $13+15+13+15=56$.

4) Hvað er $\frac{0,014}{5,6}$?

2,5

0,25

0,025

0,0025

Svar: $\frac{0,014}{5,6} = \frac{0,14}{56} = \frac{1}{100} \times \frac{14}{56} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{4} = 0,01 \times 0,25 = 0,0025$.

- 5) Hvert blað í blaðabunka er 0,25 mm á þykkt. Hve hár er þúsund blaða stafli?

0,0025 m

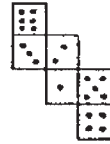
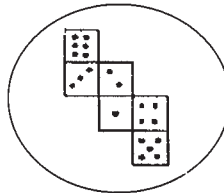
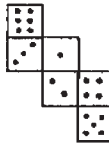
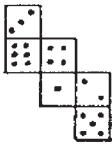
0,025 m

0,25 m

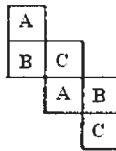
2,5 m

Svar: $1.000 \times 0,25 \text{ mm} = 250 \text{ mm} = 0,25 \text{ m}$

- 6) Á meðfylgjandi myndum sjáum við hliðar teninga sem hafa verið teknir í sundur. Á hverjum þeirra er summa gagnstæðra hliða alltaf 7?



Svar: Gagnstæðar hliðar eru tvenndirnar A, B og C. Aðeins á þriðju myndinni er summa allra þessara tvennda 7.



- 7) Látum a , b og c tákna hliðarlengdir þríhyrnings. Hver þrenndanna getur ekki verið (a, b, c) ?

(3,4,5)

(3,4,6)

(2,3,6)

(5,12,13)

Svar: Summa tveggja hliða í þríhyrningi er alltaf stærri en sú þriðja. (2,3,6) brýtur í bága við þetta skilyrði og getur því ekki staðið fyrir hliðarlengdir þríhyrnings.

- 8) Á hve marga vegu er hægt að skrifa töluna 50 sem summu tveggja framtalna?

1

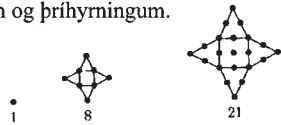
2

3

4

Svar: $50 = 47 + 3 = 43 + 7 = 37 + 13 = 31 + 19$, það eru fjórir möguleikar.

- 9) Myndirnar sýna mynstur sem er samsett úr ferningum og þríhyrningum. Hvað eru margir punktar í næstu mynd?



40

36

29

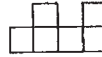
50

Svar: Næst verður ferningurinn $4 \times 4 = 16$ punktar og hver þríhyrningur hefur 4 punkta á hlið en við höfum talið 4 þeirra í ferningnum. Hver þríhyrningur gefur 5 punkta. Þeir eru fjórir og heildarfjöldi punkta í næstu mynd er þess vegna $16 + 4 \times 5 = 36$.

- 10) Myndirnar sýna kubballistaverk. Á mynd (a) sést verkið að framan en á mynd (b) sést verkið frá hlið. Hver er minnsti fjöldi kubba sem nægir til að búa til þetta listaverk?



(a)



(b)

6

7

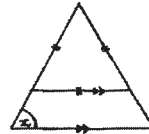
8

9

Svar: Sex kubbar nægja eins og myndin sýnir.



- 11) Á myndinni er efri þríhyrningurinn jafnhliða og grunnlínur beggja þríhyrninganna eru láréttar. Hve stórt er hornið x ?



60°

45°

30°

Ekki nægar upplýsingar.

Svar: Efri þríhyrningurinn er jafnhliða og því öll horn hans jafn stór. Þríhyrningarnir eru einshyrndir og hornið x því 60°.

- 12) Önnu finnst gott að blanda saman kók og mjólk. Hún byrjar á að fylla glasið þannig að jafnmikið sé af kók og mjólk, hrærir vel í, drekkur svo þriðjung og fyllir síðan upp með mjólk. Hversu hátt hlutfall seinni blöndunnar er kók?

 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$

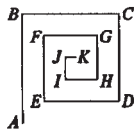
Svar: Fyrst hún hrærir vel í blöndunni er jafnmikið af kók og mjólk eftir þegar hún hefur drukkið þriðjunginn. Þá eru $\frac{2}{3}$ glassins fullir, kók að þriðjungi og mjólk að þriðjungi. Síðan er glasið fyllt með mjólk síðasta þriðjunginn. Þriðjungur seinni blöndunnar er því kók.

13) Hver eftirtalinna talna er deilanleg með 6?

151.515.151.515 123.456.789.012 122.222.222.222 789.987.697.796

Svar: Til að tala sé deilanleg með 6 verður hún að vera deilanleg með 2 og 3. Tala er deilanleg með 2 þá og því aðeins að hún sé slétt. Fyrsti möguleikinn kemur því ekki til greina. Tala er deilanleg með 3 þá og því aðeins að þversumma hennar sé deilanleg með 3. Þversumma 123.456.789.012 er 48 og þversumma 48 er 12, 3 gengur upp í 12 og talan er slétt svo 6 gengur upp í hana. Þversumma 122.222.222.222 er 23 og þversumma 789.987.697.796 er 92 og þversumma 92 er 11. Tvær síðustu tölurnar koma því ekki til greina.

14) Á myndinni eru tengd línustrik hornrétt hvert á annað. Lengd þeirra minnkar um einn við hvern snúning þannig að $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 8$ o.s.frv. Hver er lengd beinnar línu frá A til K ?



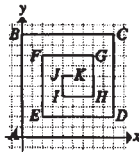
$\sqrt{30}$

$\sqrt{61}$

30

51

Svar: Setjum punktana inn á hnitakerfi með A í $(0,0)$. Þá er K í $(5,6)$. Lengdin er þar með $\sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.



15) Ef $a * b = \frac{a+b}{2}$ og $x * 14 = x$, þá er x jafnt

7

-14

28

14

Svar: $x = x * 14 = \frac{x+14}{2}$ og þá $2x = x+14$ sem gefur $x = 14$.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 dæmi. Hvert dæmi er 5 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

16) Finnið abc ef $ab=12$, $bc=20$ og $ac=15$.

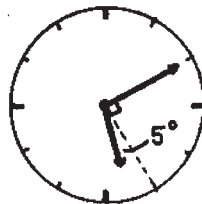
Svar: 60

Svar: $(abc)^2 = (ab)(bc)(ac) = 12 \times 20 \times 15 = 3600$ og þannig fæst að abc er ferningsróttin af 3600, þ.e. $abc = 60$.

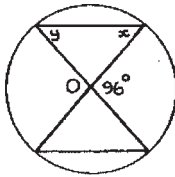
17) Hve stórt er minna hornið milli stóra og litla vísisins á klukkunni á Hallgrímskirkju þegar klukkan er 5:10?

Svar: 95°

Svar: Hringur er 360° og því samsvarar hver mínúta 6° . Ef litli vísirinn hefði ekkert hreyfst frá því klukkan fimm þá væri hornið $15 \times 6 = 90^\circ$. Hann hefur hreyfst um $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ af leiðinni milli 5 og 6. Hringurinn allur er 360° og því $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ gráður á milli tölustafa. Litli vísirinn hefur þar með færst um $\frac{1}{6} \times 30^\circ = 5^\circ$. Hornið á milli litla og stóra vísisins er því $90^\circ + 5^\circ = 95^\circ$.



18) Á meðfylgjandi mynd er O miðja hringsins. Hversu stórt er hornið x ?



Svar: **48°**

Svar: $y = 48^\circ$, því hornið y er ferilhorn sem spannar boga sem er 96° . Grannhorn horns í þríhyrningi er jafnt summu hinna tveggja. Við höfum þá $x + y = 96^\circ$ og þar með $x = 48^\circ$.

19) Nokkrir krakkar héldu tombólu og ætluðu að skipta ágóðanum á milli sín. Fyrst ætluðu þeir að láta hvern og einn fá 250 krónur en þá vantaði 100 krónur upp á. Síðan reyndu þeir að láta hvern fá 200 krónur en þá urðu 250 krónur afgangs. Hver var ágóðinn af tombólunni?

Svar: **1650 kr.**

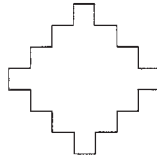
Svar: Látum n vera fjölda krakka og A ágóðann. Þá er $A - 250n = -100$ og $A - 200n = 250$. Drögum fyrri jöfnuna frá þeirri síðari og fáum $50n = 350$, svo $n = 7$. Ágóðinn er þá $A = 200 \times 7 + 250 = 1650$ krónur.

20) Nú ætla strumparnir að taka upp símkerfi. Númerin verða að vera fimm stafa tölur sem byrja á einum. Hver tölustafur má aðeins koma einu sinni fyrir í númerinu. Hvað geta strumparnir haft mörg mismunandi símanúmer?

Svar: **3024**

Svar: 1 er alltaf fyrsta talan svo eftir standa fjórir tölustafir sem við getum valið úr tölunum 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Fyrir annan tölustafinn getum við valið eina af níu tölum. Fyrir þriðja tölustafinn höfum þá átta möguleika. Þann fjórða getum við valið úr þeim sjö sem þá eru eftir og að lokum getum við valið fimmta tölustafinn úr þeim sex sem eftir standa. Þetta gera $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ mismunandi númer.

- 21) Davíð bóndi á stóra jörð. Hér að neðan má sjá hvernig jörðin er í laginu. Öll horn eru rétt og línustrikin eru öll jafnlöng. Davíð ætlar að girða jörðina. Hann veit að ummálið er það sama í kílómetrum og flatarmálið í ferkílómetrum. Hvað þarf hann langt girðingarefni í metrum?



Svar: **31360 m**

Svar: Látum L vera lengdina á línustrikunum. Strikin eru 28 svo ummálið er $28L$ km. Jörðin inniheldur 25 ferninga með hliðarlengdum L . Flatarmál jarðar Davíðs er því $25L^2$ km². Þetta gefur okkur að $25L^2 = 28L$, við deilum í báðar hliðar með $25L$ og fáum $\frac{25L^2}{25L} = \frac{28L}{25L}$. Þannig fæst að $L = \frac{28}{25} = 1,12$ km og að lokum fæst að ummálið og þar með lengd girðingarinnar er $28 \times 1,120 \text{ m} = 31,360$ metrar.

- 22) Athugum að $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ og $2^5 = 32$ sem endar á 2 eins og 2^1 . Hver er aftasti tölustafurinn í 2^{2005} ?

Svar: **2**

Svar: Athugum að $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ og $2^5 = 32$. Þannig fæst að 2^6 endar á $2 \times 2^5 = 2 \times 2 = 4$, 2^7 endar á $2^2 \times 2^5 = 4 \times 2 = 8$ o.s.frv. Nú er $2^{2005} = 2^{5 \times 401} = (2^5)^{401}$ sem endar á sömu tölu og $2^{401} = 2^{5 \times 80 + 1} = (2^5)^{80} \times 2$ sem aftur endar á því sama og $2^{80} \times 2 = 2^{5 \times 16} \times 2 = (2^5)^{16} \times 2$, sem enn fremur endar á því sama og $2^{16} \times 2 = 2^{15} \times 4 = 2^{5 \times 3} \times 4 = (2^5)^3 \times 4$. Að endingu sjáum við að 2^{2005} enda á sama tölustaf og $2^3 \times 4 = 32$ eða 2.

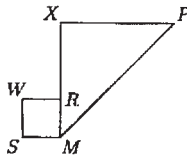
Þriðji hluti

Í þessum hluta eru 2 dæmi sem eru 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

- 23) 25 boltum er dreift í 14 körfur. Í hverri körfu eru 1, 2, eða 3 boltar. Í 7 körfum er bara 1 bolti. Í hve mörgum körfum eru 3 boltar?

Svar: Úr því það er aðeins 1 bolti í 7 karfanna, þá eru 2 eða 3 boltar í hinum 7. Látum x standa fyrir fjölda karfa með 2 boltum og y standa fyrir fjölda karfa með 3 boltum. Þá er $x + y = 7$. Í þessar körfur fara 18 boltar og við getum táknað það með $2x + 3y = 18$. Leysum þetta með innsetningu, $x = 7 - y$, og þá fæst $18 = 2(7 - y) + 3y = 14 - 2y + 3y = 14 + y$. Þar með er $y = 4$ og $x = 3$. Það eru 4 körfur með 3 boltum.

- 24) Á myndinni er $WRMS$ ferningur sem er 1 að flatarmáli. PMX er rétthyrndur þríhyrningur og $PX = XM = 7$. Hver er fjarlægðin frá W til P ?



Svar: Við höfum að $PY = 8$ og $YW = 6$. Notum þá reglu Pýþagórasar og fáum $PW^2 = PY^2 + YW^2 = 64 + 36 = 100$, svo $PW = 10$.

