

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans fyrir grunnskólanema 22. febrúar 2006 10. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) Einfaldið brotið $\frac{1+2}{6+7}$?

$$\frac{1}{10}$$

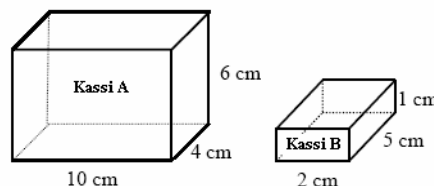
$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{13}$$

$$\frac{21}{76}$$

Svar: $\frac{1+2}{6+7} = \frac{3}{13}$.

2) Hversu margir kassar af gerð B komast fyrir í einum kassa af gerð A?



4

8

12

24

Svar: Á botn kassa af gerð A má raða fjórum kössum af gerð B þannig að þeir þekji botninn algerlega. Slíkt lag er 1 cm á þykkt og því hægt að koma nákvæmlega 6 lögum fyrir í kassa af gerð A. Þetta gera $4 \times 6 = 24$ kassar.

3) Magnús fær 200 krónur á tímann fyrir að passa litla bróður sinn. Undir koddanum á hann 3.000 krónur. Hann passar bróður sinn 7 tíma á dag. Hvað þarf hann að passa bróður sinn í marga daga til að eiga fyrir hjóli sem kostar 22.600 krónur?

4

8

14

16

Svar: Magnús vantar $22.600 - 3.000 = 19.600$ krónur. Á hverjum degi þegar hann passar bróður sinn vinnur hann sér inn $200 \times 7 = 1.400$ krónur. Við deilum 1.400 í 19.600 og fáum $19.600 / 1.400 = 14$. Magnús þarf að passa bróður sinn í 14 daga til að eiga fyrir hjólinu.

- 4) Um tölurnar a, b og c gilda jöfnurnar
- $$1^3 = 1$$
- $$a^3 = 1 + 7$$
- $$3^3 = 1 + 7 + b$$
- $$4^3 = 1 + 7 + c$$
- Hvaða tala er $a + b + c$?

58

77

79

110

Svar: Við sjáum að $a = 2$ úr því að $2^3 = 8$ og fáum $b = 3^3 - 8 = 27 - 8 = 19$. Loks fæst $c = 4^3 - 8 = 64 - 8 = 56$. Svarið er þess vegna $a + b + c = 2 + 19 + 56 = 77$.

- 5) Hvert af eftirtöldu hefur stærst flatarmál?
- A) Hringur með geisla (radíus) 3.
 B) Réttthyrningur með hliðar að lengd 3 og 9.
 C) Réttthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdir 6, 8 og 10.
 D) Jafnhliða þríhyrningur með hliðar að lengd 7.

A

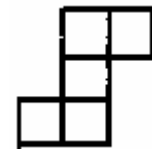
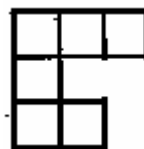
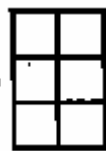
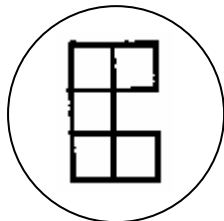
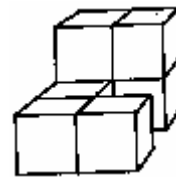
B

C

D

Svar: Réttthyrningurinn hefur flatarmálið $3 \times 9 = 27$, réttthyrndi þríhyrningurinn hefur flatarmálið $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ og jafnhliða þríhyrningurinn hefur hæð sem er minni en 7 og því flatarmál sem er minna en $\frac{7 \times 7}{2} = \frac{49}{2} = 24,5$. Hringurinn hefur flatarmálið $3^2 \times \pi = 9 \times \pi > 9 \times 3 = 27$ sem er stærst.

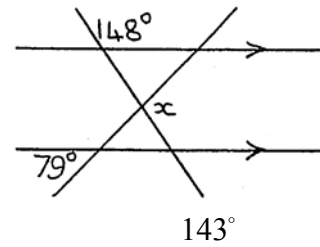
- 6) Myndin sýnir uppröðun nokkurra kubba.
 Hvernig lítur uppröðunin út ef horft er úr mikilli hæð ofan á hana?



Svar: Með því að athuga kubbafjölda botnflatarins sjáum við að kubbastæðan lítur út eins og eftirfarandi mynd sé horft úr mikilli hæð.



- 7) Hvað er hornið merkt x margar gráður ef örvamerktu línurnar eru samsíða?



111°

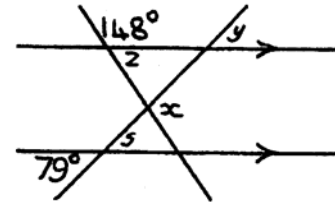
148°

32°

143°

Svar: Hornið sem er merkt s á myndinni er topphorn við hornið 79° og þau því jafn stór. Hornin s og y eru einslæg horn við samsíða línur eins og myndin sýnir og því jafn stór. Hornið sem merkt er 148° er svo vegna þess að það er grannhorn við hornið z sem er þá 32° .

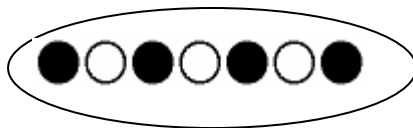
Að lokum er x frændhorn við hornin 32° og 79° og því er $x = 32^\circ + 79^\circ = 111^\circ$.



- 8) Inga og Þóra fara í leik með 7 Óþellóleikmenn.



Hver leikmaður er svartur öðrum megin og hvítur hinum megin. Leikur þeirra er þannig að önnur má velja hvaða tvo leikmenn sem er og snúa báðum við. Síðan leikur hin á sama hátt og svo koll af kalli. Leikurinn hefst eins og sést á myndinni. Hverri af eftirtöldum stöðum er ekki hægt að ná með þessum reglum?



Svar: Við tökum eftir að fjöldi leikmanna með svörtu hliðina upp er alltaf oddatala af því að fjöldi þeirra er oddatala í upphafi. Ef valdir eru tveir svartir og þeim snúið hefur fjöldi svartra minnkað um tvo og er áfram oddatala. Ef valdir eru tveir hvítir og þeim snúið fjölgar svörtum um tvo og fjöldi þeirra er áfram oddatala. Ef valdir eru einn svartur og einn hvítur og þeim snúið breytist fjöldinn ekki. Staðan á fyrstu myndinni hefur fjóra leikmenn sem vísa svörtu hliðinni upp og getur því ómögulega komið upp. Sýna má að hægt er að ná hinum stöðunum.

- 9) Á samkomu heilsast allir með handabandi nákvæmlega einu sinni. Hvað eru margir á samkomunni ef handaböndin eru 66?

12

22

65

67

Svar: Látum n vera fjölda manna á samkomunni. Hver og einn heilsar $n-1$ sem gera $n(n-1)$ handabönd, nema hvað þá höfum við tvítalið hvert handaband.

Handaböndin eru því $\frac{n(n-1)}{2}$. Þetta gefur $n(n-1) = 2 \times 66 = 132 = 12 \times 11$ eða $n = 12$.

10) Fyrir rauntölur a, b, c og d látum við $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ vera töluna $ad - bc$.

Hver er talan $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$?

-2

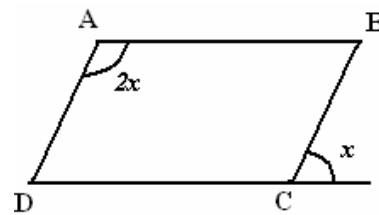
2

10

22

Svar: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

11) Myndin sýnir samsíðung.
Hve margar gráður er hornið x ?



30°

60°

90°

120°

Svar: Úr því $ABCD$ er samsíðungur er $\angle DCB = 2x$. Þannig fæst að $180^\circ = x + 2x = 3x$ þar sem þau eru grannhorn og því er $x = 60^\circ$.

12) Níu oddatölur standa í röð og summa þeirra er 189. Hver er fyrsta talan?

11

13

15

17

Svar: Látum x vera fyrstu töluna.

Þá er $189 = x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8) + (x+10) + (x+12) + (x+14) + (x+16) = 9x + 72$

og $x = \frac{189 - 72}{9} = \frac{117}{9} = 13$.

13) Hver er næsta talan í rununni 3, 2, 5, 4, 7, 8, 9, 16, 11, 32, 13, 64, 15, ___?

17

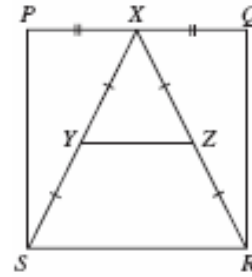
30

96

128

Svar: Runan er tvískipt, tölurnar í oddatölusætunum eru 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 og tölurnar í sléttutölusætunum eru 2, 4, 6, 8, 16, 32, 64. Næsta tala tilheyrir sléttutölusætunum þar sem allar tölurnar, utan sú fyrsta, er tvöföld talan á undan. Talan 128 kemur því næst í rununni.

- 14) $PQRS$ er ferningur með hliðarlengd 8.
 X er miðpunktur PQ og Y og Z eru
 miðpunktar XS og XR eins og myndin sýnir.
 Hvert er flatarmál trapisunnar $YZRS$?



10

24

28

36

Svar: Hæð trapisunnar er AS . Þríhyrningarnir $\triangle ASY$ og

$\triangle PSX$ eru einslaga. Þess vegna er $\frac{AS}{PS} = \frac{YS}{XS}$ en Y er

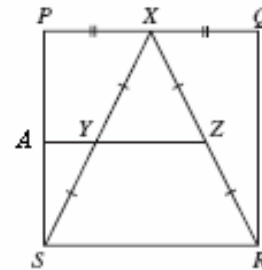
miðpunktur XS og því $\frac{YS}{XS} = \frac{1}{2}$ og þar með

$AS = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}8 = 4$. Einnig eru $\triangle XYZ$ og $\triangle XSR$

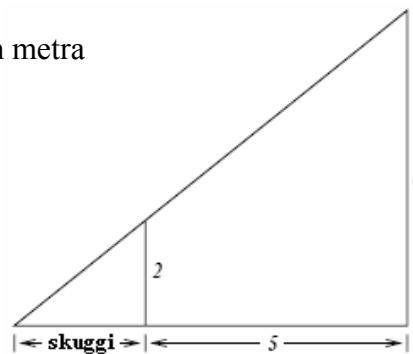
einslaga og því $\frac{YZ}{SR} = \frac{XY}{XS} = \frac{1}{2}$.

Við fáum þannig að $YZ = \frac{1}{2}SR = \frac{1}{2}8 = 4$. Flatarmál trapisunnar er

$$AS \times \frac{SR + YZ}{2} = 4 \times \frac{8 + 4}{2} = 24.$$



- 15) Tveggja metra hár maður stendur í fimm metra
 fjarlægð frá 6 metra háum ljósastaur.
 Hve langur er skuggi hans?



1 m

1,5 m

2 m

2,5 m

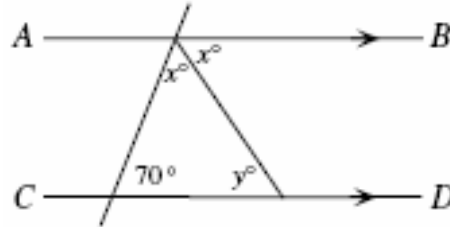
Svar: Látum x vera lengd skuggans í metrum. Þríhyrningurinn með skammhliðar x og 2 og þríhyrningurinn með skammhliðar $x + 5$ og 6 eru einslaga.

Við höfum því $\frac{x}{2} = \frac{x+5}{6}$ sem er jafngilt $3x = x + 5$ og þar með $x = 2,5$.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

- 16) Línurnar AB og CD eru samsíða.
Hve stórt er hornið y ?



Svar: **55°**

Svar: Þar sem línurnar AB og CD eru samsíða er $x = y$. Þá er

$$180^\circ = x + y + 70^\circ = 2y + 70^\circ \text{ og } y = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ.$$

M 1 N N

- 17) Steini sendi Helgu miða sem á var ritað: + G S M er NGM-S1M1.

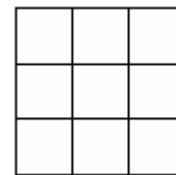
S 1 M 1

Helga finnur símanúmer Steina með því að gera ráð fyrir að bókstafirnir standi fyrir ólíka tölustafi og rétt sé lagt saman. Hvert er símanúmerið hjá Steina?

Svar: **893-4131**

Svar: Athugum fyrst að $S = M + 1$ því bókstafirnir standa fyrir ólíka tölustafi og það er mest hægt að geyma einn frá sætinu á undan. Einnig sjáum við að G hlýtur að vera 9 og það er einn geymdur frá tugasætinu. Einingarsætið gefur að $N + M = 11$ og þá er $10 + M = N + S + 1 = N + M + 2$ úr því $S = M + 1$. Þannig sést að $N = 8$, $M = 3$ og $S = 4$. Símanúmer Steina er 893-4131.

- 18) Tölunum 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 og 256 er raðað í ferninginn á myndinni þannig að margfeldi talna er hið sama í hverri línu, láréttri, lóðréttri og horna á milli. Hvert er þetta sameiginlega margfeldi?



Svar: **4096**

Svar: Köllum þetta margfeldi m .

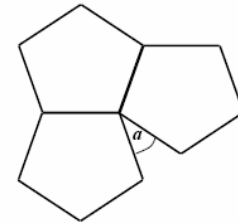
Margfeldi allra talnanna er $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 \times 32 \times 64 \times 128 \times 256 = 2^{1+2+3+4+5+6+7+8} = 2^{36}$ sem er jafnframt er m^3 . Því er $m^3 = (2^{36})^{1/3} = 2^{12} = 4096$.

- 19) Hjólreiðamaður hjólar 40 km á jöfnum hraða 20 km/klst áður en hann skiptir um gír og hjólar 20 km á jöfnum hraða 40 km/klst. Hver er meðalhraði hans?

Svar: **24 km/klst**

Svar: Það tekur hjólreiðamanninn $\frac{40 \text{ km}}{20 \text{ km/klst}} = 2 \text{ klst}$ að hjóla fyrri hlutann og $\frac{20 \text{ km}}{40 \text{ km/klst}} = 0,5 \text{ klst}$ að hjóla seinni hlutann. Vegalengdin er 60 km og meðalhraðinn því $\frac{60 \text{ km}}{2,5 \text{ klst}} = 24 \text{ km/klst}$.

- 20) Ásgeir ætlar að sauma sér dúk úr leðurbútum af gömlum fótbolta. Fótboltinn samanstendur af 20 sexhyrnum bútum og 12 fimmhyrnum. Hann byrjar að sauma saman þrjá fimmhyrnda búta en uppgötvar að það gengur ekki. Hve margar gráður er hornið a ?



Svar: **36°**

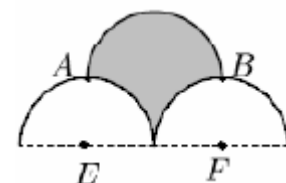
Svar: Hornasumma fimmhyrnings er $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$. Horn í reglulegum fimmhyrningi eru $540^\circ / 5 = 108^\circ$. Hornið a er $360^\circ - 3 \times 108^\circ = 360^\circ - 324^\circ = 36^\circ$.

- 21) Í spilinu RISK eru notaðir bláir og rauðir teningar. Bláir eru til sóknar og rauðir til varnar. Ef sótt er með einum bláum teningi gegn einum rauðum er um $6 \times 6 = 36$ mismunandi útkomur að ræða þegar þeim er kastað. Sóknin vinnur ef blái teningurinn hefur hærra gildi en sá rauði, annars vörnin. Hve margar af útkomunum 36 enda með sigri sóknarinnar?

Svar : **15**

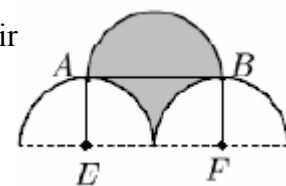
Svar: Látum tvenndina (b, r) standa fyrir þær útkomur þar sem blái teningurinn hefur hærra gildi en sá rauði. Möguleikarnir eru $(6, 5)$, $(6, 4)$, $(6, 3)$, $(6, 2)$, $(6, 1)$; $(5, 4)$, $(5, 3)$, $(5, 2)$, $(5, 1)$; $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 1)$; $(3, 2)$, $(3, 1)$; $(2, 1)$. Alls eru þetta $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ möguleikar.

- 22) Á myndinni eru þrjú hlutar úr hringum sem allir hafa geislann (radíus) 2 cm. E og F eru miðjur viðkomandi hálfhringa og ferhyrningurinn $ABFE$ er rétthyrningur. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins?



Svar: **8 cm²**

Svar: Teiknum rétthyrninginn $ABFE$ inn á myndina. Hann skiptir skyggða svæðinu í tvennt. Efri hlutinn er hálfhringur með geisla 2 cm. Sá hluti $ABFE$, sem ekki er skyggður, samanstendur af tveimur fjórðungum úr hring með geisla 2 cm. Þeir hafa jafnmikið flatarmál og skyggða svæðið fyrir ofan rétthyrninginn.



Flatarmál skyggða svæðisins er þess vegna jafnt flatarmáli $ABFE$ eða $2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$.

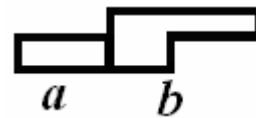
Þriðji hluti

Í þessum hluta er tvö dæmi sem eru 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

- 23) Þremur flísunum er raðað eins og myndin sýnir og eru saman 25 cm að lengd. Fimm flísunum er raðað á sama hátt og eru 39 cm að lengd. Hve löng er röð 17 flísa?



Svar: Skiptum flísunum í tvennt eins og myndin sýnir. Fyrir utan flísina lengst til vinstri bætist b við lengdina með hverri flís og flísin lengst til vinstri bætir síðan a við lengdina. Við höfum því $a + 3b = 25$ fyrir þrjár flísar og $a + 5b = 39$ fyrir fimm flísar. Ef við drögum fyrri jöfnuna frá þeirri síðari



$$a + 5b = 39$$

$$-(a + 3b = 25) \quad \text{fáum við } b = 7 \text{ og þar með } a = 25 - 3b = 25 - 21 = 4.$$

$$2b = 14$$

Röð 17 flísa er því $a + 17b = 4 + 17 \times 7 = 123$ cm.

- 24) Geir og Grani keppa í hvor kemst hraðar 30 km vegalengd. Þeir ganga ýmist með jöfnum hraða 4 km/klst eða skokka á jöfnum hraða 6 km/klst. Geir gengur helming tímans og skokkar hinn helminginn á meðan Grani gengur helming vegalengdarinnar og skokkar hinn helminginn. Reiknið út hve lengi þeir eru á leiðinni og hvor vinnur.

Svar: Látum t vera tímann sem það tekur Geir að komast vegalengdina. Á göngu

kemst hann $4 \text{ km} \times \frac{1}{2}t = 2t \text{ km}$ og á hlaupum $6 \text{ km} \times \frac{1}{2}t = 3t \text{ km}$. Við fáum að

$30 \text{ km} = 2t \text{ km} + 3t \text{ km} = 5t \text{ km}$ og þar með að Geir kemst á leiðarenda á 6 klukkustundum. Grani gengur helming vegalengdarinnar sem tekur hann

$\frac{15 \text{ km}}{4 \text{ km/klst}} = 3\frac{3}{4}$ klst og skokkar hinn helminginn sem tekur hann

$\frac{15 \text{ km}}{6 \text{ km/klst}} = 2\frac{1}{2}$ klst. Grani kemst leiðina á $3\frac{3}{4} + 2\frac{2}{4} = 5\frac{5}{4} = 6\frac{1}{4}$ klst sem er fimmtán

mínútum lakari tími en hjá Geir.