

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans fyrir grunnskólanema 18. febrúar 2004 9. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 18 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) $\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 + 2 + 2 + 2} =$

0

1

2

4

Svar: $\frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 + 2 + 2 + 2} = \frac{16}{8} = 2.$

2) $2,25 \times 0,80 =$

 $1\frac{1}{2}$ $1\frac{3}{4}$ $1\frac{4}{5}$

2

Svar: $2,25 \times 0,80 = \frac{9}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}.$

3) $1.000.000 - 101 =$

999.999

999.989

999.899

999.889

Svar: $1.000.000 - 101 = 1.000.000 - 100 - 1 = 999.900 - 1 = 999.899.$

4) Í Dótabúðinni er kössum raðað í pýramída eins og myndin sýnir. Hve margir eru kassarinn?

4

10

20

30



Svar: Neðst eru $4 \times 4 = 16$ kassar, þá koma $3 \times 3 = 9$ kassar, næst efst eru þeir $2 \times 2 = 4$ og loks er einn kassi á toppnum. Þetta gera $16 + 9 + 4 + 1 = 30$ kassar.

5) Hver eftirtalinn talna er deilanleg með 3?

11.111

1.111.111

11.111.111

111.111.111

Svar: Ef þversumma tölu er deilanleg með 3 þá er talan sjálf deilanleg með 3 og eins ef talan er deilanleg með 3 þá er þversumman deilanleg með 3. Þversumma tölunnar 111.111.111 er 9 sem er þá deilanleg með 3. Hinar tölurnar hafa þversummur 5, 7 og 8 og eru því ekki deilanlegar með 3.

6) Ef $a * b = (a \times a) - b$, þá er $(3 * 4) * 5 =$

0

6

20

35

Svar: Reiknum fyrst $3 * 4 = (3 \times 3) - 4 = 9 - 4 = 5$, þá er $(3 * 4) * 5 = 5 * 5 = (5 \times 5) - 5 = 25 - 5 = 20$.

7) Hvað eru margar frumtölur (prímtölur) milli talnanna 20 og 30?

1

2

3

4

Svar: Milli 20 og 30 eru frumtölurnar 23 og 29, þ.e. tvær frumtölur.

8) Hver bókstafur stendur fyrir einn af tölustöfunum 1, 2, 3, 4 og 5.

AB

~~XC~~

DE

Ef rétt er margfaldað, hvaða bókstafur stendur þá fyrir tölustafinn 3?

A

B

C

D

Svar: Ef B eða C eru 1 þá er B eða C jafnt E sem gengur ekki. E getur heldur ekki verið 1 því margfeldi B og C getur ekki endað á 1. Ef D er 1 er útkoma margfeldisins minni en 20 sem gengur ekki. Því hlýtur A að vera 1. Ef B eða C eru 5 þá verður E að vera 0 eða 5. Ef E er 5 þá verður B eða C að vera 5. Því getur aðeins D verið 5. Við sjáum að B, C og E verða að vera einhver af tölunum 2, 3 og 4. Þá hlýtur E að vera 2 og eftir stendur að $C=4$ og $B=3$.

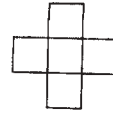
9) Hver talnanna er stærst?

 $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

Svar: Gerum samnefnt til að átta okkur betur á stærðunum. Samnefnarinn verður 60.

Fáum þá $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$, $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$ og $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ og sjáum að stærst talnanna er $\frac{5}{6}$.

- 10) Við ætlum að raða fimm tölum, 1, 2, 3, 4 og 5, í ferningana hér til hliðar þannig að summan lárétt og summan lóðrétt sé 8. Í miðjunni verður þá talan



1

2

3

4

Svar: Ef 5 er í miðjunni fæst að summa stærri en 8 í þeirri línu sem 4 er í. Ef 3 eða 4 eru í miðjunni fæst summa stærri en 8 í þeirri línu sem 5 er í. Ef 2 er í miðjunni verður 1 að vera í sömu línu og 5. En þá eru 2, 3 og 4 í hinni línunni með summuna 9. Ef við hins vegar setjum 1 í miðjuna, 2 uppi, 5 niðri, 3 til vinstri og 4 til hægri þá er summan lóðrétt og lárétt jöfn 8.

- 11) Ég hugsa mér tvær tölur. Þegar ég legg þær saman fæ ég 12. Þegar ég dreg þá lægri frá þeirri hærri fæ ég 16. Hver er stærri talan?

-2

2

14

18

Svar: Köllum stærri töluna x og þá minni y . Þá höfum við $x + y = 12$, $x - y = 16$ og þar með $2x = 28$ eða $x = 14$ og þá $y = -2$. Stærri talan er því 14.

- 12) Athugum níu stafa tölur sem eru þannig að sérhver tölustafanna frá 1 upp í 9 komi nákvæmlega einu sinni fyrir í tölunni, til dæmis tölurnar 314567928 og 938267145. Hve margar af þessum tölum eru framtölur?

0

1

2

3

Svar: Þversumma slíkrar tölur er $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ sem er deilanleg með 9. Notum okkur síðan að ef þversumma tölur er deilanleg með 9 þá er talan sjálf líka deilanleg með 9. Tölurnar eru þar með allar deilanlegar með 9 og því getur engin þeirra verið framtala.

- 13) Talnaruna byrjar svona: 1, 4, 7, 10, ... Hver er hundraðasta talan?

300

301

299

298

Svar: Munur tveggja talna í röð í rununni er alltaf 3. Fyrsta talan er 1, önnur tala er $1 + 3 = 4$, þriðja talan er $1 + 2 \times 3 = 7$, fjórða talan $1 + 3 \times 3 = 10$, sú fimmta er $1 + 4 \times 3 = 13$ og þannig koll af kalli. Hundraðasta talan er $1 + 99 \times 3 = 1 + 297 = 298$.

- 14) Á meðfylgjandi mynd eru hringirnir sammiðja og er breidd skyggða svæðisins sú sama og geisli (radius) minni hringins. Hvert er hlutfallið milli flatarmáls stóra hringins og flatarmáls skyggða svæðisins?



$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{3}{4}$

Svar: Köllum geisla smærra hringins r . Þá er geisli stærri hringins $2r$. Fáum þar með að flatarmál litla hringins er πr^2 og flatarmál þess stóra $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$.

Flatarmál skyggða svæðisins er því $4\pi r^2 - \pi r^2 = 3\pi r^2$ og hlutfall þess flatarmáls og flatarmáls stóra hringins fæst með $\frac{3\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{3}{4}$.

- 15) Talan $\frac{1900}{2004}$ er jöfn

$\frac{1900+1}{2004+1}$

$\frac{1900+104}{2004+104}$

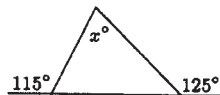
$\frac{1900+104}{2004+208}$

$\frac{1900+950}{2004+1002}$

Svar: $\frac{1900}{2004} = \frac{1900 \times \frac{3}{2}}{2004 \times \frac{3}{2}} = \frac{1900 \times (1 + \frac{1}{2})}{2004 \times (1 + \frac{1}{2})} = \frac{1900+950}{2004+1002}$. Almennt gildir að þegar

hlutföllin $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ eru jöfn þá er $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

- 16) Hve stórt í gráðum er hornið sem x táknar á myndinni?



30°

45°

60°

65°

Svar: Grannhorn 115° hornsins er $180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$, grannhorn 125° hornsins er $180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. Notum loks að hornasumma þríhyrningsins er $180^\circ = 65^\circ + 55^\circ + x$ og því $x = 180^\circ - 65^\circ - 55^\circ = 60^\circ$

- 17) Bátur siglir frá punkti A og siglir 5 kílómetra í norður. Síðan skiptir hann um stefnu og siglir 12 kílómetra í austur. Hve langt er þá á milli A og bátsins?

12 km

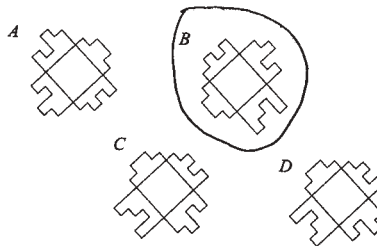
11 km

13 km

14 km

Svar: Notum reglu Pýþagórasar, þá fæst $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ svo að fjarlægðin er 13 km.

- 18) Ófėtið hann Orri klippti tening í tvennt og vandaði sig mikið. Hér til hliðar er annar hlutinn. Hver er hinn hlutinn?



Svar: Eftir að hafa skoðað myndirnar má sjá að B er eina myndin sem kemur til greina.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 6 spurningar. Hver spurning er 6 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

- 19) Deilt er í margfeldi allra frumtalnanna (prímtalnanna) milli 1 og 2004 með 10.
Hver verður afgangurinn?

Svar: 0

Svar: Meðal frumtalnanna eru tölurnar 2 og 5 en margfeldi þeirra er 10. Margfeldi allra frumtalnanna milli 1 og 2004 er því líka margfeldi af 10 og afgangurinn því 0.

- 20) Viti A blikkar á 4 sekúndna fresti, viti B á 5 sekúndna fresti, viti C á 6 sekúndna fresti og allir vitarnir loga samtímis klukkan 22:00 tiltekinn dag. Hvað er klukkan næst þegar allir vitarnir loga samtímis?

Svar: 22:01

Svar: Minnsta samfeldi (sameiginlegt margfeldi) talnanna $4 = 2 \times 2$, 5 og $6 = 2 \times 3$ er $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$. Það líða því 60 sekúndur þar til að allir vitarnir loga næst samtímis en þá er klukkan 22:01.

- 21) Tvær lestir, báðar á 5 km/klst hraða, keyra í rólegheitum í áttina hvor að annarri á sama spori. Fífi fluga byrjar fremst á annarri lestinni. Þegar 5 km eru á milli lestanna flýgur hún á hraðanum 10 km/klst í átt að hinnu lestinni. Þegar hún kemur að hinnu lestinni snýr hún við og stefnir á lestina sem hún byrjaði á. Þetta gerir Fífi þangað til lestirnar rekast hvor á aðra. Hve langt flýgur flugan Fífi?



Svar: 5 km

Svar: Lestirnar nálgast hvor aðra með hraðanum 10 km/klst. Á milli þeirra eru 5 km svo það líður hálf tími áður en þær lenda saman. Fífi hefur því hálf tíma til að fljúga sem hún gerir með hraðanum 10 km/klst. Hún kemst því vegalengdina

$$10 \frac{\text{km}}{\text{klst}} \times 0,5 \text{ klst} = 5 \text{ km.}$$

- 22) Tveir sniglár, Óli og Bjarni, etja kappi í spennandi maraþoni. Óli byrjaði og hvílið þriðja hvern dag. Bjarni sem byrjaði viku seinna, fer tvöfalda vegalengd á við Óla á ferðadögum sínum, en hvílið annan hvern dag. Hve margir dagar líða uns Bjarni nær Óla?

Svar: 18 dagar

Svar: Taflan hér að neðan sýnir hve langt sniglarnir hafa farið við lok dags 1, 2, 3, 4 o.s.frv. Fjarlægðareiningin er vegalengdin sem Óli fer á ferðadögum sínum. Óli byrjaði á degi 1, en Bjarni byrjaði ekki fyrr en að 7 dögum liðnum og því er staðsetning hans fyrst gefin við lok áttunda dags. Bjarni nær Óla í lok 18. dags.

Dagur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Óli	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12	12
Bjarni	0	0	0	0	0	0	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12

- 23) Lúðvík ætlar að láta byggja go-kart braut. Á meðfylgjandi mynd sést hvernig hún á að vera í laginu, það er samsett úr fjórum hálfhringum. Litlu hálfhringirnir eru allir með 100 metra geisla (radíus). Hve löng er brautin?



Svar: 600π m

Svar: Geisli stóra hálfhringsins er þrisvar sinnum geisli minni hálfhringanna. Ummál minni hálfhringanna er $\frac{1}{2} \times (2 \times 100)\pi = 100\pi$ metrar og ummál þess stóra er $\frac{1}{2} \times (2 \times 300)\pi = 300\pi$ metrar. Við höfum þrjá litla hálfhringi og einn stóran. Heildarlengdin er því $3 \times 100\pi + 300\pi = 600\pi$ metrar.

- 24) Í poka eru 20 einlitar kúlur sem eru ýmist rauðar, gular, grænar eða bláar. Rauðu kúlurnar eru einni fleiri en þær gulu, þær gulu eru fjórum fleiri en þær grænu og þær grænu eru einni fleiri en þær bláu. Hve margar eru rauðu kúlurnar?

Svar: 8

Svar: Látum x tákna fjölda bláu kúlnanna. Þá er $x+1$ græn kúla, $x+5$ gular kúlur og $x+6$ rauðar kúlur. Tökum þetta saman og fáum að $x + (x+1) + (x+5) + (x+6) = 20$. Það er $4x+12 = 20$, $4x = 8$ og $x = 2$. Rauðu kúlurnar eru $x+6 = 8$.

Þriðji hluti

Í þessum hluta er 1 dæmi sem er 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

- 25) Magga málari stendur í einu þreppanna í stiganum sínum. Hún tekur eftir að þrepin fyrir neðan þrepið sem hún stendur í eru tvisvar fleiri en þrepin fyrir ofan það. Eftir að hún hefur lækkað sig um átta þrep tekur hún eftir að fyrir ofan þrepið sem hún stendur í eru jafnmörg þrep og fyrir neðan. Hve mörg þrep eru í stiganum?

Svar: Segjum að stiginn hafi $n + 1$ þrep. Í upphafi eru $\frac{2}{3}n$ þrep fyrir neðan þrepið sem hún stendur í. Eftir að hafa lækkað sig um 8 þrep eru $\frac{1}{2}n$ fyrir ofan þrepið sem hún stendur í, þ.e. $\frac{2}{3}n - 8 = \frac{1}{2}n$. Margföldum þessa jöfnu með $2 \times 3 = 6$ og fáum $4n - 48 = 3n$ eða $n = 48$. Stiginn hefur því $n + 1 = 48 + 1 = 49$ þrep.