

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans
fyrir grunnskólanema
24. febrúar 2001
10. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
 Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) $\frac{190 + 192 + 194 + 196 + 198 - 200 - 202 - 204 - 206 - 208}{10} =$

-10 -5 0 5

Lausn: Brotið er $\frac{(190 - 200) + (192 - 202) + (194 - 204) + (196 - 206) + (198 - 208)}{10} =$
 $\frac{5 \times (-10)}{10} = -5.$

2) Ef $6 - n = \frac{57}{10}$ er $n =$

$\frac{51}{10}$ $-\frac{3}{10}$ $\frac{117}{10}$ $\frac{3}{10}$

Lausn: $6 - n = \frac{57}{10}$ svo $n = \frac{60}{10} - \frac{57}{10} = \frac{3}{10}.$

$$3) \frac{0,5 + 0,05}{0,01} =$$

55 5,5 0,55 0,055

$$\text{Lausn: } \frac{0,5 + 0,05}{0,01} = \frac{0,55}{0,01} \times \frac{100}{100} = \frac{55}{1} = 55.$$

4) Minnsta jákvæða heila talan, sem er bæði deilanleg með 24 og 30, er

2 300 120 240

Lausn: Jákvæðar heilar tölur deilanlegar með 24 eru 24, 48, 72, 96, 120, ... og deilanlegar með 30 eru 30, 60, 90, 120, Sú minnsta, sem er deilanleg með báðum, er 120.

5) Setjið tölustaf í stað \diamond svo talan 5470125 \diamond 3 verði deilanleg með 9.

0 3 6 8

Lausn: Heil tala er deilanleg með 9 þá og því aðeins að þversumma hennar sé deilanleg með 9. Þversumman $28 + \diamond$ getur verið 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 eða 37. Sú eina sem er deilanleg með 9 er 36 svo $\diamond = 36 - 28 = 8$.

6) Þegar talan $N \neq 0$ skilgreinum við $\uparrow N \uparrow = N^2 + 1$ og $\downarrow N \downarrow = \frac{1}{N}$.

Reiknið $\downarrow(3 + \uparrow 2 \uparrow)\downarrow$

$\frac{1}{8}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{16}{3}$

$$\text{Lausn: } \downarrow(3 + \uparrow 2 \uparrow)\downarrow = \downarrow(3 + 2^2 + 1)\downarrow = \downarrow(3 + 4 + 1)\downarrow = \downarrow 8 \downarrow = \frac{1}{8}.$$

7) Í frádráttardæminu tákna a og b tölustafi.

Finnið $a + b$.

$$a \ 1 \ b$$

$$- \underline{3 \ 4 \ 7}$$

$$5 \ 6 \ 4$$

7

8

9

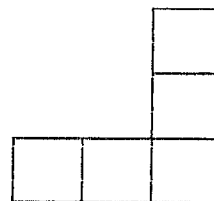
10

Lausn: Þar sem $a \ 1 \ b = 347 + 564 = 911$ er $a = 9$, $b = 1$ og $a + b = 10$.

8) Myndin er gerð úr fimm jafnstórum ferningum

og flatarmál hennar er 180 cm^2 .

Hvert er ummál myndarinnar?



36 cm

45 cm

72 cm

120 cm

Lausn: Flatarmál hvers fernings er $\frac{180}{5} = 36 \text{ cm}^2$ og hliðarlengd þá 6 cm .

Ummál myndarinnar er $12 \times 6 = 72 \text{ cm}$.

9) Ef $x + y = \frac{7}{10}$ og $x - y = \frac{5}{14}$ þá er $x^2 - y^2 =$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^2 - \left(\frac{5}{14}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2$$

$$\left(\frac{7}{10} - \frac{5}{14}\right)^2$$

Lausn: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

10) m og n eru jákvæðar tveggja stafa heilar tölur. Hvert eftirtalinna brota er stærst?

$$\frac{n}{m}$$

$$\frac{n+1}{m-1}$$

$$\frac{n-1}{m}$$

$$\frac{n}{m-1}$$

Lausn: Í öllum brotum eru bæði teljari og nefnari jákvæðir. Brotið $\frac{n+1}{m-1}$ hefur bæði stærsta teljarann og minnsta nefnarann og er því stærst.

- 11) Jói hefur tekið 10 stærðfræðipróf í vetur og hefur að meðaltali 6,8 í einkunn í þeim. Hvað þarf Jói að fá í næsta prófi til að hann hafi þá 7,0 að meðaltali?

7,2

7,8

8,8

9,0

Lausn : Úr prófunum 10 hefur Jói samtals $10 \times 6,8 = 68$ og þarf samtals $11 \times 7 = 77$ úr prófunum 11 til að fá 7,0 að meðaltali. Hann þarf því $77 - 68 = 9$ á ellefta prófinu.

- 12) Hver er aftasti tölustafur summunnar $3^{17} + 7^{13}$?

1

6

4

0

Lausn : Athugum veldi af 3: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$ svo aftasti tölustafurinn er 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3... og $3^{17} = 3^{4 \times 4 + 1}$ endar á 3.

Athugum þá veldi af 7: $7^1 = 7$, 7^2 endar á 9, 7^3 endar á 3, 7^4 endar á 1, 7^5 endar á 7 og þannig koll af kalli. Loks fæst að $7^{13} = 7^{3 \times 4 + 1}$ endar á 7. Þar sem 3^{17} endar á 3 og 7^{13} endar á 7 endar $3^{17} + 7^{13}$ á 0.

- 13) Summa tveggja talna er 30 og margfeldið 221. Þegar sú minni er dregin frá þeirri stærri fæst

4

3

2

1

Lausn : Látum x vera stærri töluna en y þá minni. Þá er $x + y = 30$, $x \cdot y = 221$, $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 4xy = (x + y)^2 - 4xy = 900 - 884 = 16$ og því $x - y = 4$.

- 14) Í leikfimitíma nýtast 36 mínútur til að spila körfubolta. Ef 24 eru í bekk, aðeins 10 spila samtímis og allir fá að spila jafnlengi þá fær hver að leika

12 mínútur

15 mínútur

18 mínútur

20 mínútur

Lausn : Þar sem 10 geta leikið í 36 mínútur deilast 360 mínútur á 24.

Hver leikur þá í $\frac{360}{24} = 15$ mínútur.

- 15) Í margfeldnum töfraferningi er margfeldið hið sama í sérhverjum dálki, í sérhverri línu og í báðum hornalínunum. Skrifum nú í auðu reitina jákvæðar heilar tölur þannig að úr verði margfeldinn töfraferningur. Þá er $x =$

5		x
4		
	1	

2

4

5

16

Lausn : Þar sem margfeldi talnanna í 1. línu og 2. dálki er það sama er talan $5x$ í miðreitnum. Úr því margfeldi talna í 1. dálki er það sama og margfeldi talna í hornalínunni með $5x$ og x fæst $5 \cdot 4 = 5x \cdot x$ og $x^2 = 4$. Þá er $x = 2$ eini möguleikinn. Meðfylgjandi ferningur sýnir að $x = 2$ er lausn.

5	100	2
4	10	25
50	1	20

Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði. Hér á aðeins að skrá svarið.

- 16) Hvað eru til margar þriggja stafa tölur sem byrja á 1 og hafa nákvæmlega tvo eins tölustafi?

Svar : 27

Lausn : Þessar tölur eru af gerðinni $11x$, $1x1$ eða $1xx$ þar sem x er $0, 2, 3, \dots, 9$. Fjöldi þessara talna er $3 \times 9 = 27$.

- 17) Talan $(123456)^2 + 123456 + 123457$ er ferningur (annað veldi) tölunnar

Svar : 123457

Lausn : Talan er af gerðinni $n^2 + n + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ þar sem $n = 123456$, þ.e. $(123457)^2$. Talan er því ferningur tölunnar 123457.

18) Hve margar tveggja stafa tölur eru minni en margfeldi tölustafa þeirra?

Svar : Engin

Lausn : Sýnum að engin slík tveggja stafa tala er til. Táknum tveggja stafa tölu með ab þar sem $1 \leq a \leq 9$ og $0 \leq b \leq 9$. Þá er $ab - a \times b = 10a + b - a \times b = a(10 - b) + b \geq a(10 - b) > 0$, þ.e. $ab > a \times b$ svo talan er alltaf stærri en margfeldi tölustafa hennar.

19) Finnið tölustafina a og b ef fjögurra stafa talan $86ab$ er deilanleg með 3, 4 og 5.

Svar : $a=4$ og $b=0$

Lausn : Þar sem talan $86ab$ er deilanleg með 5 er aftasti tölustafurinn b annaðhvort 0 eða 5. Nú ganga 4 upp í $86ab$ og þá líka upp í ab . Talan ab er þá slétt, þá er b slétt og samkvæmt framansögðu er $b=0$. Þar sem 4 ganga upp í $a0$ er a slétt tala. 3 ganga upp í $86a0$ og þá líka upp í þversummunni $8+6+a = 14+a$. Prófum sléttu tölustafina 0, 2, 4, 6 og 8 og við sjáum að $a=4$ kemur bara til greina. Talan 8640 er deilanleg með 3, 4 og 5 svo $a=4$ og $b=0$.

20) Finnið allar heilar tölur N sem uppfylla skilyrðin :

- i) N er á milli 40 og 80.
- ii) Þegar deilt er í N með 5 verður afgangurinn 2.
- iii) Þegar deilt er í N með 7 verður afgangurinn 4.

Svar : 67

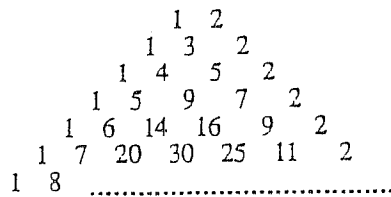
Lausn :

Tölur sem uppfylla i) og ii) eru 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72 og 77.

Tölur sem uppfylla i) og iii) eru 46, 53, 60, 67 og 74.

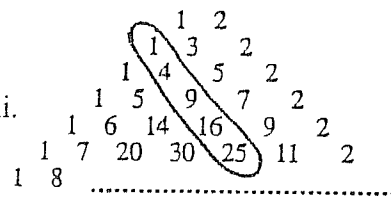
Tölur sem uppfylla i), ii) og iii) eru í báðum talnarununum, talan 67 er sú eina.

21) Í meðfylgjandi lista af heilum tölu segjum við að þriðja talan í fimmtu línu sé 14. Hver er nítjándi talan í tuttugustu línu?

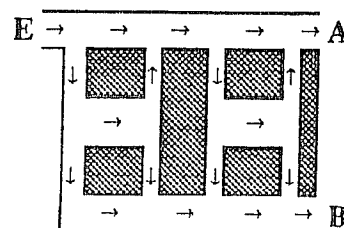


Svar : 361

Lausn : 1. talan í 2. línu er $1=1^2$.
 2. talan í 3. línu er $4=2^2$.
 3. talan í 4. línu er $9=3^2$ og þannig koll af kolli.
 19. talan í 20. línu er $19^2 = 361$.

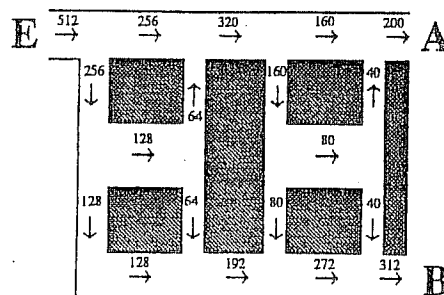


22) Í hluta gatnakerfis, sem sést á myndinni, eru eingöngu einstefnugötur. Gerum ráð fyrir að 512 aki fram hjá E og haldi svo áfram framhjá A eða B. Hve margir fara fram hjá B ef við gerum ráð fyrir að við hver gatnamót, þar sem velja má um tvær áttir, velji helmingur hvora leið?



Svar : 312

Lausn : Merkjum fjölda bíla inn á myndina



Það eru 312 sem aka fram hjá B.

Þriðji hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

- 23) Í 50 manna hópi eru 38 dökkhærðir, 29 brúneygir og 23 eru bæði dökkhærðir og brúneygir. Hve margir í þessum 50 manna hópi eru hvorki dökkhærðir né brúneygir?

Lausn : Teljum fyrst þá sem eru dökkhærðir eða brúneygir. Þeim má skipta í þrjá aðskilda hópa. Í fyrsta hópinn látum við þá sem eru dökkhærðir en ekki brúneygir, í annan hópinn þá sem eru brúneygir en ekki dökkhærðir og í þann þriðja þá sem eru bæði dökkhærðir og brúneygir.

Í þessum 50 manna hópi eru $38 - 23 = 15$ dökkhærðir en ekki brúneygir, $29 - 23 = 6$ brúneygir en ekki dökkhærðir og 23 bæði dökkhærðir og brúneygir. Það eru þá $50 - (15 + 6 + 23) = 50 - 44 = 6$ sem eru hvorki dökkhærðir né brúneygir.

- 24) Mismunur þriggja stafa tölu og spegiltölu hennar er á milli 400 og 500. Hver er þessi mismunur? (Spegiltala tölu fæst þegar röð tölustafa tölunnar er snúið við).

Lausn : Látum abc vera þriggja stafa töluna. Ef $a = c$ fæst $abc = cba$ og mismunurinn núll sem er útilokað. Því er $a \neq c$ svo $a > c$ eða $a < c$. Gerum ráð fyrir að $a > c$ og þá gildir $abc - cba$ er á milli 400 og 500.

Nú er $abc - cba = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) =$

$100(a - c) + (c - a) = 99(a - c)$ sem er því aðeins milli 400 og 500 að $a - c = 5$.

Þá fæst að mismunurinn er $99 \times 5 = (100 - 1) \times 5 = 500 - 5 = 495$.