

Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans
fyrir grunnskólanema
27. febrúar 2002
10. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
 Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

1) $\frac{\frac{3}{7} - 1}{1 - \frac{7}{3}} =$

$-\frac{61}{21} \qquad \frac{7}{3} \qquad -1 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)$

Lausn: $\frac{\frac{3}{7} - 1}{1 - \frac{7}{3}} = \frac{21\left(\frac{3}{7} - 1\right)}{21\left(1 - \frac{7}{3}\right)} = \frac{9 - 21}{21 - 49} = \frac{-12}{-28} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{3}{7}$.

2) Ef $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{a}$ er $a =$

$-\frac{1}{6} \qquad \frac{6}{5} \qquad 6 \qquad (-6)$

Lausn: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{a}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{a}$, $\frac{1}{6} = -\frac{1}{a}$ og $a = -6$.

- 3) Meðaltal átta talna er 5. Bætt er við eina töluna og verður þá meðaltalið 6.
 Hverju var bætt við töluna?

6 7 **8** 14

Lausn: Meðaltal talnanna átta er 5 svo summa þeirra er 40. Ef bætt er við eina töluna verður meðaltalið 6 svo summa allra talnanna er því 48. Því var $48 - 40 = 8$ bætt við.

4) $\frac{2^{2001} - 2^{2000}}{2^{2001} + 2^{2000}} =$

$2^{-4000} \qquad \left(\frac{1}{3}\right) \qquad \frac{1}{2} \qquad 2^{4000}$

Lausn: $\frac{2^{2001} - 2^{2000}}{2^{2001} + 2^{2000}} = \frac{2^{2000}(2 - 1)}{2^{2000}(2 + 1)} = \frac{1}{3}$.

- 5) Fjöldi oddatalna milli $\frac{19}{4}$ og $\frac{43}{2}$ er

8 **9** 10 16

Lausn: $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ og $\frac{43}{2} = 21\frac{1}{2}$ svo á milli eru níu oddatölur nefnilega 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 og 21.

- 6) Hver verður afgangurinn þegar tölunni 5 er deilt í 3^{22} ?

1 **4** 5 9

Lausn: $3^{22} = (3^2)^{11} = 9^{11} = 9 \cdot 9^{10} = 9 \cdot (81)^5$ sem endar á 9 og þegar deilt er í hana verður afgangurinn 4 eins og þegar 5 er deilt í 9.

- 14) Kveikt er samtímis á tveimur jafnlöngum kertum. Annað kertið brennur upp á 4 klukkutímum en hitt á 5 klukkutímum. Hve margar klukkustundir líða frá því að kveikt er á kertunum þar til lengd annars kertisins er þreföld lengd hins?

$$\left(\frac{40}{11}\right) \quad 3 \quad \frac{45}{12} \quad \frac{63}{20}$$

Lausn: Látum L vera upphaflegu lengd kertanna. Eftir t klukkustundir er kertið sem brennur hraðar $L\left(1 - \frac{t}{4}\right)$ að lengd en hitt $L\left(1 - \frac{t}{5}\right)$ að lengd. Jafnan

$$L\left(1 - \frac{t}{5}\right) = 3 \cdot L\left(1 - \frac{t}{4}\right) \text{ gefur } 20 - 4t = 60 - 15t, \quad 11t = 40 \quad \text{og} \quad t = \frac{40}{11}.$$

- 15) Jákvæð heiltala kallast ferningstala ef hún er annað veldi af heiltölu. Tölurnar 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 og 121 eru allar ferningstölur. Hve margar jákvæðar heiltölur x hafa þennan eiginleika að x og $x + 99$ eru báðar ferningstölur?

$$1 \quad 2 \quad \left(3\right) \quad 49$$

Lausn: Gerum ráð fyrir að tölurnar x og $x + 99$ séu ferningstölur og skrifum $x = s^2$ og $x + 99 = t^2$ þar sem $t > s$ eru heiltölur. Þá er $99 = t^2 - x = t^2 - s^2 = (t + s)(t - s)$ og einnig $99 = 99 \cdot 1 = 33 \cdot 3 = 11 \cdot 9$. Það eru þrjú möguleikar $t = 50$ og $s = 49$, $t = 18$ og $s = 15$ eða $t = 10$ og $s = 1$. x getur verið 2401, 225 eða 1.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði. Hér á aðeins að skrifa svarið.

- 16) Þegar talan 5 er lögð við þriðjung tölu fæst helmingur tölunnar. Hver er talan?

Svar: 30

Lausn: Köllum töluna x og þá er $\frac{1}{3}x + 5 = \frac{1}{2}x$. Margföldum þessa jöfnu með 6 og fáum $2x + 30 = 3x$ eða $x = 30$.

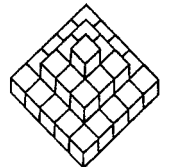
- 17) Finnið tölustafinn A ef fjögurra stafa talan $3AA1$ er deilanleg með 9.

Svar: $A = 7$

Lausn: Tala er deilanleg með 9 þá og því aðeins að þversumma hennar sé það. Ef talan $3AA1$ er deilanleg með 9 er þversumma hennar $4 + 2A$ einnig deilanleg með 9. Nú er $4 \leq 4 + 2A \leq 22$ svo $4 + 2A = 9$ eða $4 + 2A = 18$. Væri $4 + 2A = 9$ fengist $A = \frac{5}{2}$ sem passar ekki. $4 + 2A = 18$ gefur $A = 7$.

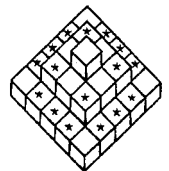
- 18) Kubbunum á myndinni er raðað þétt saman í þrjár hæðir.

Hluturinn, sem þannig fæst er, allur málaður rauður, líka hliðin sem snýr niður. Þegar málningin er þornuð er hluturinn rifinn í sundur kubb fyrir kubb. Hve margir kubbanna, sem þannig fást, hafa nákvæmlega þrjár rauðar hliðar?



Svar: 16

Lausn: Merkjum kubbana með nákvæmlega þrjár rauðar hliðar. Þeir eru 16.



- 19) Samtals eru notaðir 642 tölustafir til að tölusetja blaðsíður í bók.
Hve margar blaðsíður eru í bókinni?

Svar: 250

Lausn: Á blaðsíðu 1 til 9 þarf 9 tölustafi, á blaðsíðu 10 til 99 þarf $2 \cdot 90 = 180$ tölustafi og þá eru komnir 189 tölustafir. Þá eru eftir $642 - 189 = 453$ sem duga á næstu $\frac{453}{3} = 151$ blaðsíðu. Það eru því $9 + 90 + 151 = 250$ blaðsíður í bókinni.

- 20) Þegar Jói átti að leggja saman tvær jákvæðar heiltölur bætti hann óvart núlli aftan við aðra töluna svo útkoman varð 6641 í stað 2411. Hverjar voru tölurnar?

Svar: 470 og 1941

Lausn:

Köllum réttu tölurnar a og b og þá er $a + b = 2411$. Segjum að við bætum 0 aftan við a og fáum þannig töluna $10a$ og gefið er $10a + b = 6641$. Þá er $10a + b - (a + b) = 9a$ og einnig $9a = 6641 - 2411 = 4230$ svo $a = 470$. Nú er $470 + b = 2411$ svo $b = 1941$. Réttu tölurnar eru 470 og 1941.

- 21) Jói og Gunna komust í stóran konfektakassa og skipta konfektmolunum þannig að fyrst tekur Jói einn mola, þá Gunna tvo, svo Jói þrjú, þá Gunna fjóra og þannig koll af kalli. Ef að lokum eru ekki nógu margir molar eftir fær sá sem ekki getur fengið sinn skammt allan afganginn. Hve margir molar voru í kassanum ef Jói fær samtals 101 mola?

Svar: 211

Lausn: Þar sem $1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100$ fær Jói 19 mola í næstsíðasta skiptið en 1 í síðasta skiptið. Gunna fær $2 + 4 + 6 + \dots + 20 = 110$ mola svo upphaflega voru $101 + 110 = 211$ molar í kassanum.

- 22) Fyllið í auðu reitina þannig að summa talnanna í sérhverri línu, lárétt, lóðrétt og hornanna á milli, verði sú sama.

-10		-7
	-2	

Svar:

-10	11	-7
1	-2	-5
3	-15	6

Lausn: Fyllum í aðra lóðréttu línuna með x og y .

-10	x	-7
	-2	
	y	

Þá er $-10 + x - 7 = x - 2 + y$ svo $y = -15$.

Summan í hverri röð er $x - 17$ svo við fáum þá:

-10	x	-7
	-2	
$x - 8$	-15	$x - 5$

Þá er $x - 17 = (x - 8) - 15 + (x - 5)$, $x - 17 = 2x - 28$ svo $x = 28 - 17 = 11$.

Þar sem summa hvernar línu er $x - 17 = 11 - 17 = -6$ fáum við eftirfarandi lausn.

-10	11	-7
1	-2	-5
3	-15	6

Þriðji hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

- 23) Skipta skal 9 kg af kaffibaunum í 7 kg og 2 kg. Til þess er notuð skálavog, tvö lóð, annað 50 g en hitt 200 g og til verksins er til nóg af flátum. Lýsið hvernig þetta er hægt ef ekki má nota skálavogina oftar en þrisvar.

Lausn : Fyrst notum við skálavogina til að skipta 9 kg til helminga. Í annað skiptið notum við skálavogina til að helminga annan 4,5 kg hlutann í tvo 2,250 kg hluta. Í þriðja skiptið notum við bæði lóðin til að taka 250 g af öðrum 2,250 kg hlutanum og fáum þannig 2 kg. Afgangurinn er þá samtals 7 kg.

- 24) Þrír höfundar, Aron, Birgir og Davíð, skrifa sagnfræðiskáldsögu fyrir Bláa forlagið og fá greitt í hlutföllunum 8 : 6 : 5. Hefði forlagið greitt þeim sömu upphæð í hlutföllunum 7 : 5 : 4 hefði einn þeirra fengið 2500 kr. meira. Hve mikið fékk hver þeirra?

Lausn : Aron fékk $\frac{8}{8+6+5} = \frac{8}{19} = \frac{8 \cdot 16}{19 \cdot 16} = \frac{128}{304}$ heildarupphæðarinnar en hefði fengið

$\frac{7}{7+5+4} = \frac{7}{16} = \frac{7 \cdot 19}{16 \cdot 19} = \frac{133}{304}$ með hinni skiptingunni.

Birgir fékk $\frac{6}{19} = \frac{6 \cdot 16}{19 \cdot 16} = \frac{96}{304}$ en hefði fengið $\frac{5}{16} = \frac{5 \cdot 19}{16 \cdot 19} = \frac{85}{304}$ með hinni

skiptingunni og Davíð fékk $\frac{5}{19} = \frac{5 \cdot 16}{19 \cdot 16} = \frac{80}{304}$ en hefði fengið $\frac{4}{16} = \frac{4 \cdot 19}{16 \cdot 19} = \frac{76}{304}$.

Það er því bara Aron sem hefði fengið meira í seinna tilvikinu.

Segjum að upphæðin, sem þeir fengu, hafi verið x krónur. Þá er $\left(\frac{133}{304} - \frac{128}{304}\right)x = 2500$,

það er $\frac{5}{304}x = 2500$ svo $x = 304 \cdot 500 = 152000$.

Aron fékk því $\frac{8}{19} \cdot 152000 = 64000$ kr., Birgir $\frac{6}{19} \cdot 152000 = 48000$ kr. og

Davíð $\frac{5}{19} \cdot 152000 = 40000$ kr.