Stærðfræðikeppni Flensborgarskólans fyrir grunnskólanema 26. febrúar 2003 10. bekkur

Svör og lausnir

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru 15 spurningar. Hver spurning er 3 stiga virði.
Setjið hring utan um rétt svar. Fyrir rangt svar er 1 stig dregið frá.

---

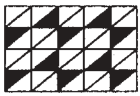
1) $\dfrac{1+2+3+4}{1\times2\times5}$ er jafnt

1 2 3 4

Lausn: $\dfrac{1+2+3+4}{1\times2\times5} = \dfrac{10}{10} = 1.$

---

2) Siggi heklar teppi. Hann notar 2 liti og heklar mynstur eins og sést á myndinni.



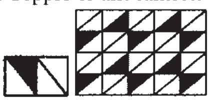
Hve stórt hlutfall teppisins er dökkt á lit?

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$

Lausn: Ef teppinu er skipt upp í þríhyrninga verða til 40 jafnstórir þríhyrningar. Af þeim eru 10 dökkir. Svarið er því $\dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$.

Eða

Ef við skiptum teppinu upp í minni ferhyrninga eins og á myndinni hér að neðan þá sést að fjórðungur hvers ferhyrnings er í dökkum lit og því er fjórðungur alls teppisins í dökkum lit. Teppið er allt samsett úr slíkum ferhyrningum.



3) Ef tveimur teningum er kastað, hvaða summa er þá líklegast að komi oftast upp?

7 6 8 9

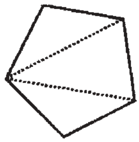
Lausn: Skrifum niður mögulegar útkomur á teningunum tveimur í röð og summu þeirra.

1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5+11
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12

Summan 2 kemur einu sinni, 3 kemur tvisvar, 4 þrisvar, 5 fjórum sinnum, 6 fimm sinnum, 7 sex sinnum, 8 fimm sinnum, 9 fjórum sinnum, 10 þrisvar, 11 tvisvar og loks 12 einu sinni. Summan 7 kemur oftast upp.

---

4) Á myndinni teiknum við með punktalínum úr einu horni fimmhyrnings þær hornalínur sem ekki eru hliðarlínur. Hvað fáum við margar punktalínur ef við gerum það sama fyrir reglulegan 50-hyrning?



47 48 49 50

Lausn: Í fimmhyrningi getum við dregið tvær punktalínur og þrjár í sexhyrningi. Tökum eftir því að við getum teiknað punktalínu í alla hina punktana að undanskildum punktinum sem við erum í og þeim tveim sem næstir standa. Almennt gildir því fyrir n-hyrninga með $n \geq 3$ að hægt er að draga $n-3$ punktalínur frá einum punkti. Svarið er af þeim sökum $50-3 = 47$.

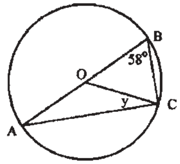
---

5) Torfi var að horfa á flugeldasýningu af svölunum heima. Hann heyrði hvellinn af stærstu bombunni 6 sekúndum eftir að hann sá sprenginguna? Um það bil hve langt er hann frá flugeldasýningunni ef við segjum að hraði hljóðsins sé 332m/s?

1 km 2 km 6 km 4 km

Lausn: $6\text{ s} \times 332\text{ m/s} = 1992\text{ m}$ svo við segjum að það sé um það bil 2 km.

6) Hringur með miðju í O inniheldur þríhyrningana AOC og COB. AOB er bein lína. Ef hornið $\angle OBC$ er 58° þá er hornið $y = \angle OCA$

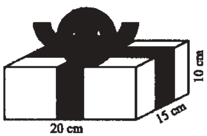


58° 64° 32° 29°

Lausn: Hliðarnar OA, OB og OC eru allar jafnlangar enda geislar (radíusar) í sama hringnum. Þess vegna eru þríhyrningarnir OBC og OAC báðir jafnarma. Fyrst þeir eru jafnarma þá er $\angle OCB = 58°$ og $\angle OAC = y$. Notum okkur nú að hornasumma þríhyrnings er 180° sem gefur $180° = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = y + (y + 58°) + 58° = 2y + 116°$. Leysum þetta og fáum $2y = 64°$ eða $y = 32°$.

---

7) Afmælisgjöf er pakkað inn og skreytt með borða eins og myndin sýnir. Í hnútinn og slaufuna fara 47 cm af borða. Heildarlengd borðans sem fer í skreytinguna er í metrum talin



1,57 1,67 1,79 1,37

Lausn: Lengd borðans er (2 × lengd) + (2 × breidd) + (2 × hæð) + (hnútur og slaufa) sem er (2 × 20 cm) + (2 × 15 cm) + (4 × 10 cm) + (47 cm) = 1,57 cm.

---

8) Finnið næstu þrjá liði í rununni: 0, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, __ , __ , __ , ...

31, 32, 64 31, 62, 63 31, 32, 33 45, 46, 92

Lausn: 0 = 2(0), 1 = 2(0) + 1, 2 = 2(1), 3 = 2(1)+1, 6 = 2(3), 7 = 2(3)+1, 14 = 2(7), 15 = 2(7)+1, 30 = 2(15). Næst kemur því 31 = 2(15)+1, 62 = 2(31) og 63 = 2(31)+1.

9) Haraldur keyrir 45 000 km á bílnum sínum. Hann fer með eitt varadekk og til að taka enga áhættu skiptir hann reglulega um dekk. Þegar ferðinni er lokið hefur hann keyrt jafnmikið á öllum dekkjum. Hvað keyrði hann marga kílómetra á hverju dekki?

45 000 9 000 36 000 18 000

Lausn: Hvert dekk er undir bílnum $\frac{4}{5}$ af leiðinni. $\frac{4}{5} \times 45000 = 36000$ svo hvert dekk er undir bílnum 36000 km.

---

10) Aðgerðin a * b er skilgreind með a * b = ab – a + b. Hvað er x ef 5 * x = 17?

$\frac{17}{5}$ 2 3 $\frac{11}{3}$

Lausn: 5 * x = 17 jafngildir því að $5x - 5 + x = 17$ sem aftur er jafngilt jöfnunni $6x = 22$. Deilum með 6 og fáum $x = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$.

---

11) Hver er síðasti tölustafurinn í $2004^{2003+2002+2001+2000+1999+1998}$?

2 4 6 8

Lausn: 4×4 endar á 6 og 6×4 endar á 4. Því enda slétt veldi af 4 á 6 en oddatöluveldi af 4 enda á 4. Í okkar dæmi er veldisvísirinn 2003+2002+2001+2000+1999+1998 = 3×4001 = 12003 sem er oddatala. Svarið er því 4.

---

12) Hve margir tölustafir eru í minnstu tölunni sem samanstendur einungis af fimmum (t.d. 5555) og er deilanleg með 99?

9 10 18 36

Lausn: Tala er deilanleg með $99 = 9\times11$ þegar hún er bæði deilanleg með 9 og 11.

a) Talan er deilanleg með 11 þegar fjöldi tölustafa er jafn. 11 ganga upp í $55 = 5\times11$ og því eru $5555 = 55 \times 101$, $555555 = 55 \times 10101$, o.s.frv. En ef talan hefur oddatölufjölda fimma þá verða 5 afgangs ef deilt er með 11, eins og til dæmis $555 = 55 \times 10 + 5$.

b) Tala er deilanleg með 9 þegar þversumma hennar er deilanleg með 9. Fjöldi fimmanna verður því að vera margfeldi af 9.
Minnsti fjöldi fimma sem uppfyllir bæði a) og b) er þar með $2\times9 = 18$.

12) Í einum þátta í síðustu röð Survivor þáttanna var ein þrautin milli ættbálkanna þannig að ættbálkarnir höfðu 21 fána sem þeir máttu fjarlægja 1, 2 eða 3 í hverri umferð. Sook Jai byrjar í keppninni við Chuay Gahn og sá tapar sem tekur síðasta fánann. Hver fullyrðinganna er sönn?

A Það er ekki hægt að segja til um sigurvegara fyrirfram.

B Það skiptir ekki máli hvernig Sook Jai byrjar, með réttum leik vinnur Chuay Gahn.

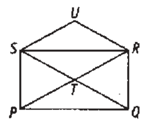
C Sook Jai vinnur alltaf.

D Ef Sook Jai lætur kylfu ráða kasti í byrjun getur ættbálkurinn búist við að vinna í rúmlega helmingi tilfella.

Lausn: Segjum að Sook Jai taki n fána í einhverri umferð. Ef Chuay Gahn passar að taka $4 - n$ fána í sömu umferð þá minnkar fjöldi fána um fjóra í hverri umferð. Eftir fimm umferðir er búið að fjarlægja 20 fána og Sook Jai á að gera og tapar. Rétt svar er því B.

---

14) Myndin hér að neðan er teiknuð án þess að lyfta pennanum frá blaðinu með því að byrja í einum punkti og teikna allar línurnar aðeins einu sinni. Fjöldi mögulegra upphafspunkta er



2 3 4 5

Lausn: Takið eftir að nákvæmlega 2 af punktunum P, Q, R, S, T, U eru við oddatölufjölda af línum, þ.e. P og Q. Þegar farið er frá upphafspunkti er aðeins ein lína notuð til að fara út; og þegar komið er að endapunkti er aðeins ein lína notuð til að komast í punktinn. Í öll önnur skipti er farið í gegnum punktinn og notuð til þess ein lína til að koma að honum og ein til að fara frá honum. Því geta aðeins upphafs- og endapunktur verið við oddatölufjölda lína. Úr því það eru tveir punktar, P og Q, við oddatölufjölda lína, þá verður annar þeirra að vera upphafspunktur og hinn endapunktur. Við getum líka skipt á hlutverkum þeirra og höfum því 2 punkta sem mögulega upphafspunkta.

15) Hungraður veiðimaður gengur fram á tvo fjárhirða. Annar þeirra á 3 brauðhleifa en hinn 5 og eru allir bauðhleifarnir jafnstórir. Þeir deildu brauðinu jafnt og veiðimaðurinn borgaði 800 krónur fyrir sinn skammt.
Hvernig eiga fjárhirðarnir að skipta peningunum á milli sín?

300 kr. og 500 kr. 200 kr. og 600 kr. 100 kr. og 700 kr. 150 kr. og 650 kr.

Lausn: Brauðhleifarnir eru samtals 8 og hver og einn fær þá $\frac{8}{3}$ brauðhleifa. Fyrir $\frac{8}{3}$ brauðhleifa eru greiddar 800 krónur svo hver brauðhleifur er $\frac{800}{8/3} = 300$ krónu virði. Fyrsti fjárhirðirinn, köllum hann Ara, lagði til 3 brauðhleifa og á þá $3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$ brauðhleifa inni. Ari á þá að fá $\frac{1}{3} \times 300 = 100$ krónur. Hinn fjárhirðirinn, Bjarni, á að fá þær 700 krónur sem eftir eru.

Annar hluti

Í þessum hluta eru 7 spurningar. Hver spurning er 5 stiga virði.
Hér á aðeins að skrifa svarið.

---

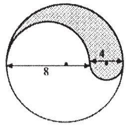
16) Þakflísar eru settar á þak og byrjað neðst og endað efst. Neðst eru 32 flísar, sérhver önnur röð hefur 2 flísum færra en næsta röð fyrir neðan og efsta röðin hefur 8 flísar. Hvað eru þá margar raðir af flísum?

Svar: 13 raðir

Lausn: Í röðunum eru 32, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8 flísar.
Þetta eru 13 raðir.

---

17) Finnið flatarmál skyggða svæðisins á meðfylgjandi mynd. Hálfhringirnir eru með þvermál 8 og 4.

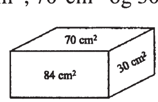


Svar: 12π

Lausn: Til að finna flatarmál skyggða svæðisins drögum við flatarmál hálfhringsins með þvermálið 8 frá flatarmáli stóra hálfhringsins með þvermálið 12 og leggjum að lokum við flatarmál minnsta hálfhringsins með þvermálið 4.
Þetta verður því $\frac{1}{2} \times\pi\times 6^2 - \frac{1}{2} \times\pi\times 4^2 + \frac{1}{2} \times\pi\times 2^2 = \pi(18-8+2) = 12\pi$.

---

18) Flatarmál hliðanna í rétthyrndum kassa eru $84\ \text{cm}^2$, $70\ \text{cm}^2$ og $30\ \text{cm}^2$.



Hvert er rúmmál kassans í cm^3?

Svar: $420\ cm^3$

Lausn: Táknum lengd með l, hæð með h og breidd með b. Höfum að $l \times h = 84\ \text{cm}^2$, $b \times h = 30\ \text{cm}^2$ og $l\times b = 70\ \text{cm}^2$. Rúmmál kassans er

$$l\times b\times h = \sqrt{(l\times l)(b\times b)(h\times h)} = \sqrt{(l\times h)(b\times h)(l\times b)} = \sqrt{(84)(30)(70)} =$$

$$\sqrt{(2\times 2\times 3\times 7)(2\times 3\times 5)(2\times 5\times 7)} = \sqrt{2^4\times 3^2\times 5^2\times 7^2} = 2^2\times 3\times 5\times 7 = 420\ cm^3.$$

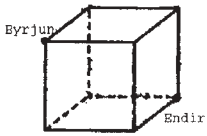
19) Hve margar heiltölur milli 1 og 10 000 innihalda tölustafinn 5 a.m.k. tvisvar?

Svar: 523

Lausn: Hugsum okkur að við skrifum allar heiltölurnar milli 1 og 9999 niður sem 4-stafa tölur, þar sem fyllt er upp með núllum þar sem við á. Til dæmis er 9 = 0009 og 131 = 0131. Ef við viljum að talan innihaldi enga fimmu þá höfum við 9 möguleika fyrir hvern tölustaf og því 9^4 möguleika. Athugum þó að hér höfum við einnig talið möguleikann þegar allir tölustafirnir eru 0. Fjöldi talna, sem innihalda enga fimmu, er þess vegna 9^4-1. Teljum nú fjölda talna sem innihalda nákvæmlega eina fimmu. Ef við segjum að það sé fimm í fyrsta sætinu, þá höfum við 9 möguleika fyrir hin 3 sætin. Þetta gefur 9^3 möguleika. Við höfum þá 9^3 möguleika fyrir hvert sæti eða samtals 4×9^3 möguleika á tölu með nákvæmlega einni fimmu. Fjöldi talna með engri eða einni fimmu er þá
$9^4-1+4\times9^3=(9+4)\times9^3-1=13\times9^3-1$.
Fjöldi talna með tveimur eða fleiri fimmum er þá
$9999-(13\times9^3-1)=9999-13\times9^3+1=10000-13\times729=10000-9477=523$.

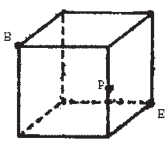
---

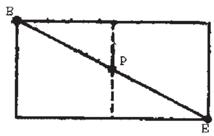
20) Matti maur þarf að komast frá einu horni risasykurmolans til gagnstæðs horns eins og sýnt er á mynd. Brúnir sykurmolans eru allar 1 metri. Hversu löng í metrum er stysta leiðin sem Matti getur farið?



Svar: $\sqrt{5}$

Lausn: Stysta leiðin frá B til E fer fyrir horn tveggja hliða.
Köllum punktinn P og athugum að hann er ekki hornpunktur teningsins. Látum BP og PE vera stystu strikin milli punktana. Hugsum okkur að við fletjum teninginn út þannig að hliðar teningsins með strikin BP og PE liggi í sama fleti eins og myndin sýnir. Stysta leiðin frá B til E er lengd striksins BE en sú lengd er skv. reglu Pýþagórasar $BE^2=1^2+2^2=5$, svo $BE=\sqrt{5}$





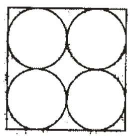
21) Þegar pílu er kastað á píluspjald er hægt að skora eftirfarandi stig: núll (ef kastarinn hittir ekki), einfaldan (1,2,3,...,20), tvöfaldan (2x1, 2x2, 2x3, ..., 2x20) og þrefaldan (3x1, 3x2, 3x3, ..., 3x20), næstum miðju (25) og miðju (50). Hver er minnsta talan sem **ekki** er hægt að ná með þremur pílum?

Svar: 143

Lausn: Með einni pílu er hægt að ná öllum tölum milli 0 og 20, öllum sléttum tölum milli 0 og 40 og öllum tölum sem eru deilanlegar með 3 milli 0 og 60, einnig er hægt að ná tölunum 25 og 50. Með einni pílu er því ekki hægt að ná eftirfarandi tölum milli 0 og 60: 23, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 44, 46, 47, 49, 52, 53, 55, 56, 58, 59. Ef við höfum náð n stigum með einni eða tveimur pílum þá getum við náð öllum tölum milli n og n+20. Með einni pílu er hægt að ná 20, 40 og 60 stigum svo við getum með tveimur pílum náð öllum tölum milli 0 og 80. Með tveimur pílum er hægt að ná 80, 100 og 120 svo við getum náð öllum tölum milli 0 og 140. Enn fremur er 120 það hæsta sem hægt er að ná með tveimur pílum svo við sjáum að við náum öllum tölum nema 120 + x þar sem x er ein af tölunum sem við náum ekki með einni pílu. Sú minnsta þeirra er 120 + 23 = 143.

---

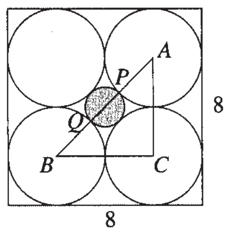
22) Hliðarnar á ferningnum á myndinni eru 8 einingar. Hve stóran geisla (radíus) hefur stærsti hringurinn sem kemst í bilið í miðjunni milli hringanna?



Svar: $2\sqrt{2} - 2$

Lausn: Látum A, B og C vera miðjur þriggja stóru hringanna eins og sýnt er. Þvermál hvers stóru hringanna er $\frac{8}{2} = 4$.
Þar með hafa AC og BC lengdina 4 og samkvæmt reglu Pýþagórasar er þá lengd AB jöfn $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.
Við sjáum að þvermál stærsta hringsins sem passar á milli þeirra stóru er PQ = AB – AP – QB = AB – 2 – 2, því AP og QB eru geislar hringanna með miðju í A og B.
Geisli miðjuhringsins er þess vegna

$$\frac{1}{2}\times(\sqrt{32} - 2 - 2) = \frac{1}{2}\times(4\sqrt{2} - 4) = 2\sqrt{2} - 2.$$



Þriðji hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi 10 stiga virði. Við mat á lausnum er tekið tillit til frágangs.

---

22) Þórólfur veiddi vænan lax sem hann skar í þrjá hluta, haus, búk og sporð. Haus fisksins var 7 cm. Sporðurinn var jafnlangur hausnum að viðbættum helmingi af lengd búksins. Lengd búksins er jöfn lengd haussins og sporðsins til samans. Hve langur er laxinn?

Lausn: Láum S tákna lengd sporðs laxins og B lengd búksins. Þá gildir að $S = 7 + 1/2B$ og $B = 7 + S$. Setjum B inn í fyrri jöfnuna og fáum $S = 7 + (7 + S)/2$ eða $2S = 14 + 7 + S$ sem gefur $S = 21$ cm. Þá er $B = 7 + 21 = 28$ cm og þar með heildarlengd laxins jöfn $7 + 28 + 21 = 56$ cm.

---

24) Gaukur á gamaldags úr með vísum. Hann veit að klukkan er á milli 3:00 og 4:00. Hann lítur á úrið og sér að stóri vísirinn er á milli 5:00 og 6:00. Seinna lítur hann aftur á úrið og sér að stóri og litli vísirinn hafa skipt um stað. Hvað er klukkan hjá Gauki í seinna skiptið?

Lausn: Látum x tákna stöðu stóra vísisins í fyrra skiptið. Athugum að þegar $x = 0$ þá er stóri vísirinn á 12 og sá litli á 3:00. Ef við táknum það með mínútum þá er stóri vísirinn í núll mínútum og sá litli í 15. Fyrir hverjar x mínútur sem stóri færist þá færist litli vísirinn um $\frac{x}{12}$. Við getum því táknað stöðu litla vísisins með $15 + \frac{x}{12}$ þegar við táknum stöðu stóra vísisins með x. Með sams konar rökum látum við y tákna stöðu stóra vísisins í seinna skiptið og $25 + \frac{y}{12}$ stöðu þess litla. Úr því þeir skipta um stað gildir $15 + \frac{x}{12} = y$ og $25 + \frac{y}{12} = x$. Setjum inn fyrir x-ið og fáum $y = 15 + (25 + \frac{y}{12})/12$ eða $12y = 15 \times 12 + 25 + \frac{y}{12} = 205 + \frac{y}{12}$ sem síðan gefur

$143 \times \frac{y}{12} = 205$ og þá $y = 205 \times \frac{12}{143} = 17\,\frac{29}{143}$.

Klukkan í seinna skiptið er þess vegna $5{:}17\frac{29}{143}$.